SCHWANENGESANG

de una colaboración

en la

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

(Dos artículos, precedidos de un prólogo dedicatoria y seguidos de algunos toques estrambóticos en torno a una viñeta)

POR

JOSÉ LÓPEZ RODRÍGUEZ

Ingeniero de Caminos, afecto a la Jefatura de Obras Públicas de Almería

1932

PAPELERÍA INGLESA

ALMERÍA

SCHWANENGESANG

de una colaboración

en la

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

(Dos artículos, precedidos de un prólogo dedicatoria y seguidos de algunos toques estrambóticos en torno a una viñeta)

POR

JOSÉ LÓPEZ RODRÍGUEZ

Ingeniero de Caminos, afecto a la Jefatura
de Obras Públicas de Almería

1932

PAPELERIA INGLESA

ALMERÍA

Prólogo-Dedicatoria

(El lector, debe dejar de serlo de este prólogo-dedicatoria. Puedo asegurarle que no perderá nada).

No he podido explicarme satisfactoriamente, el motivo o los motivos por los que no han tenido la fortuna de llegar a la publicidad, desde las columnas de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, *los dos inocentones artículos a los que este menudo folleto se dedica.*

Un buen amigo mío, hombre de buen humor que conoce algún detalle circunstancial de los que quizá hayan podido decidir la negativa a la continuación de mi pobre colaboración en la REVISTA, *deriva todo lo sucedido, de cosa al parecer tan extraña como el paso de la Escuela de Caminos al Ministerio de Instrucción Pública. Según él, a partir de tal acontecimiento, cierta fracción de aquellos profesores que dirigían y formaban la Redacción de la publicación* órgano *de nuestra colectividad, punto menos que favorablemente dispuestos al noble ejercicio de todos los recursos del arte de la enseñanza, sin desdeñar ni con mucho la controversia como avezados maestros y técnicos de competencia bien reconocida y mejor probada, desde el* cambio ministerial *indicado, se sienten orgullosamente monopolizadores de la ciencia, de la cátedra, del periodismo profesional y... hasta del sentido común, lo cual ya es el colmo del acaparamiento.*

Dada la condición dicha del opinante, no estamos por pasar por más de mera broma la explica-

ción que acabamos de exponer. Creemos que el profesorado y la Redacción son los de siempre, hasta el punto de admitir que apenas deja de darse el caso clásico, *pudiéramos decir, de mezclarse en ellos con los prestigios verdaderos o legítimos, tal cual reputación de* cuño falso; *y más bien nos inclinamos a abrigar la sospecha, un tanto fundada, de que los artículos no admitidos, operando inconscientemente, han contribuído a descubrir que «la crítica es el* reactivo *más eficaz que cabe para poder distinguir de los buenos esos prestigios* sevillanos».

Por ello (el lector me dará o quitará la razón), mis dos modestísimos artículos que compasivamente recojo en este folleto para su divulgación, portadores de unas gotas de ese reactivo, de unas leves alusiones críticas, han dado instantáneamente el precipitado característico y abundante que puede verse en la tragicómica rotura de relaciones de la Revista *conmigo.*

Artículo primero

(Este artículo, posterior cronológicamente al que le sigue, va en primer lugar por exigencia de la explicación final del folleto. Se diferencia del segundo, aparte del asunto, en que no ha sido devuelto por la Dirección de la REVISTA; la carta en la que anunciaba su envío fué la que tuvo por correspondencia la rotura de relaciones tan lamentable).

"Estudio original sobre los pórticos rectos". "Estudio original sobre los pórticos múltiples...."

Investigación previa de su autor

¿Estudios originales? ¿De quién o de quienes?

Por motivos que ni sé ni importan gran cosa al objeto de estas cuartillas, existen dos enseñanzas de Elasticidad en la Escuela de Caminos. Se estudia o se explica esa materia, en las asignaturas nombradas «Resistencia de Materiales y Elasticidad», la una, y «Elasticidad y Hormigón armado», la otra. Puede el lector si le place, comprobar esa duplicidad, curioseando si quiere, el Anuario de nuestra Escuela especial correspondiente al curso de 1930-31, que contiene el texto de los programas de ambas asignaturas.

En el respectivo a la segunda de las asignaturas citadas, figuran los estudios originales que me han servido para titular el presente articulillo; y lo tendría yo por imperfecto en sumo grado, si previamente no diera el nombre del autor de esos originales estudios, incorrectamente omitido en el programa de «Elasticidad y Hormigón armado» quizá por inconveniente exceso de modestia.

Cuantos conocemos las dos ediciones que van publicadas de la «Mecánica elástica» del notable profesor de la Escuela nuestro admirado y querido compañero y amigo el Sr. Peña, estamos en el secreto de que esos estudios originales son completamente suyos. Lo podemos afirmar así, comprobando cómo concuerdan los apartados del programa y del libro mencionados; pero con mucho más motivo, teniendo en cuenta el prólogo de dicha obra, del cual, en justificación de nuestra fundada creencia, pasamos a transcribir dos breves fragmentos.

Decía así el autor en el de la edición primera de su libro: «Quizá sea el más fecundo de los capítulos, »el dedicado a estructuras múltiples. Partiendo de la »teoría de Ritter, hacemos una *original aplicación* al »cálculo de las vigas de varios tramos y de los pórti- »cos múltiples, con operaciones tan sencillas que sólo »requieren resolver dos ecuaciones lineales, por gran- »de que sea la complicación de las cargas...» Y en el prólogo de la segunda edición de la misma «Mecánica elástica» declara el Sr. Peña esto: «En las estruc- »turas múltiples, se ha conservado la parte doctrinal »de la primera edición, pues su exposición era tan »sencillísima que no cabe simplificar, y sus aplicacio- »nes a la viga de varios tramos y pórtico múltiple »permite reducir estos problemas a fáciles operacio- »nes aritméticas aun dentro del rigor analítico. Re- »cientemente, en algunas revistas técnicas se han »publicado artículos *descubriendo* el procedimiento »que por primera vez se expuso en nuestra primera »edición...»

Nada debiéramos añadir pues, ya que tenemos la certeza del autor del discutido procedimiento o de los discutidos estudios a considerar; sin embargo, deseo una insignificante rectificación a lo expuesto, cual es, aclarar antes de entrar en materia, que esos estudios originales no son tanto como me había permitido declarar o calificar en lo que antecede. No son *completa-*

mente originales como había dicho yo, y nada mejor lo desvirtúa que la manifestación del propio Sr. Peña de haberse basado en la teoría del Sr. Ritter.

Queremos discutir los estudios

No se vaya a deducir de lo que acabamos de decir que tenemos la pretensión de discutir poco o mucho la paternidad de los estudios o procedimiento de calcular pórticos debidos al Sr. Peña. Lo que pretendemos discutir es, la exactitud del procedimiento, que en nuestro modesto sentir, es completamente inadecuado para el cálculo de dichas estructuras. La casualidad, que muchas veces tiene la ocurrencia de meterse a profesora, lo hizo ver así al modesto ingeniero que suscribe, con motivo del estudio de un pórtico múltiple utilizado al proyectar un grupo de pontones del camino de ronda o carretera de enlace de las afluentes a Almería.

Creyendo que ello pudiera ofrecer algún interés a los lectores de la REVISTA, nos propusimos dar publicidad a los cálculos de nuestro grupo de pontones, de nuestro pórtico múltiple mejor dicho, que efectuamos mediante procedimiento general, y la comprobación que en balde pretendimos utilizando el procedimiento de *masas elásticas* que nos recomendó un novel y distinguido compañero; pero la pesadez extremada nos hizo desistir de ello, ya que los errores del procedimiento original cabía ponerlos de relieve mediante el desarrollo de dos ejemplos sencillos como los que vamos a tratar; pero creemos conveniente advertir antes de proceder a ello, aunque sea ociosa la aclaración, que entenderemos por *masa elástica* (concepto que nos servirá para la designación del procedimiento del Sr. Peña) lo que Ritter llamó medida elástica, o sea, el valor de la relación del momento flector en un punto de una pieza o estructura elástica, al ángulo del giro del plano de la sección originado por la flexión en el mismo punto.

El primer ejemplo

Es tan sencillo el primero de los dos ejercicios anunciados, que no hemos visto gran inconveniente en suprimir el desarrollo de sus cálculos y hasta la figurita correspondiente, contando con que el benévolo lector podrá suplirla con leve esfuerzo de imaginación. Se trata de un pórtico equilátero empotrado de luz L, cuyo momento de inercia es constante y vale lo mismo en el dintel que en los pies derechos, I. Sometemos dicho pórtico a estas dos acciones: una fuerza vertical o peso P, según la vertical del apoyo izquierdo, y un momento o par flector actuante en el centro del dintel cuyor valor es $M = + \frac{14}{15} PL$.

Aplicando el método abreviado de Müller Breslau, obtenemos que los momentos flectores debidos a la acción de dichas causas, son en valor absoluto iguales *en todos los puntos* de ambos pies derechos del pórtico en cuestión; que vale dicho momento:

$+ \frac{PL}{50}$ en todos los puntos del apoyo izquierdo, y

$- \frac{PL}{50}$ en todos los puntos del apoyo derecho.

Y con ellos, podemos sencillamente comprobar, que la masa elástica vale $\frac{EI}{L}$ en las coronaciones de ambos pilares (con signo negativo en el izquierdo y con signo positivo en el derecho).

Si hubiéramos de rehacer los cálculos de nuestro sencillo pórtico por el método de *masas elásticas*, comenzaríamos por admitir que en las coronaciones de sus dos pilares o apoyos, por estar empotrados en sus bases, la masa elástica (en todo caso positiva) tiene por valor $4 \frac{EI}{L}$; es decir, que se le fija valor absoluto, cuádruple del verdadero; y gratuitamente también, se supone un foco de influencia o punto de momento flector nulo al tercio de la altura de los pies derechos. Resultando de ambos errores, que en vez de valer el momento flector en todos los puntos de los pies derechos de nuestro pórtico $+ \frac{PL}{30}$ ó $- \frac{PL}{30}$ (según se trate del apoyo izquierdo o del derecho conforme dijimos), como se deduce utilizando el método abreviado de Müller Breslau, por el procedimiento original de masas elásticas se calculan los que sigue:

Momento flector en la base del apoyo derecho .... $- \frac{7}{30} PL$

Momento flector en la base del apoyo izquierdo...... $+ \frac{7}{30} PL$

Momento flector en la coronación del apoyo derecho . $+ \frac{7}{15} PL$

Momento flector en la coronación del apoyo izquierdo $- \frac{7}{15} PL$

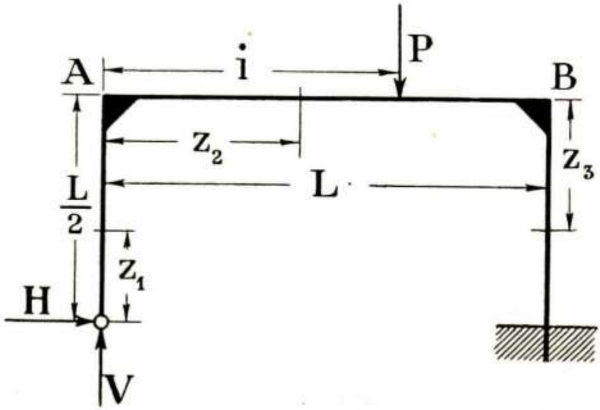
Resultados que no justifican ciertamente que pueda conceptuarse como medianamente aproximado siquiera, el método de masas elásticas.

El segundo ejemplo

Es que, la masa elástica en los casos de pórticos, es esencialmente variable como vamos a probar mediante este segundo ejercicio con cálculos y figura. Por ésta se ve, que se trata de un pórtico cuya luz es doble de la altura de los pies derechos, que están uno empotrado (el de la derecha) y el otro articulado, sobre cuyo dintel actúa un peso P a la distancia i del apoyo izquierdo o articulado. (Fig. de la página 14).

Vamos a hallar los momentos flectores deduciendo las derivadas del trabajo elástico respecto a determinadas reacciones.

Si conociéramos la reación en la base del apoyo articulado o sus componentes V y H, las expresiones de los momentos flectores en los diferentes puntos de nuestro pórtico serían como se deduce por la figura:



En el apoyo izquierdo (el articulado en su base):

$$M_1 = -Hz_1$$

En el dintel (para $o < z_2 < i$):

$$M_2 = -H\frac{L}{2} + Vz_2$$

En el dintel (para $i < z_2 < L$):

$$M'_2 = -H\frac{L}{2} + Vz_2 - P(z_2 - i)$$

En el apoyo derecho (el empotrado en su base):

$$M_3 = -H\left(\frac{L}{2} - z_3\right) + VL - P(L - i)$$

y el trabajo elástico vendría dado por la expresión

$$T = \frac{1}{2EI}\int_o^{\frac{L}{2}} M_1^2\, dz_1 +$$

$$+ \frac{1}{2KEI}\left[\int_o^i M_2^2\, dz_2 + \int_i^L M'^2_2\, dz_2\right] + \frac{1}{2EI}\int_o^{\frac{L}{2}} M_3^2\, dz_3; \quad . \quad [I]$$

(llamando E al coeficiente de elasticidad longitudinal, I al momento de inercia en los pies derechos y K a la relación del momento de inercia del dintel a I).

Otras expresiones de los momentos flectores

Pero, no vamos a utilizar las precedentes expresiones de los momentos flectores ni a calcular directamente los valores de las componentes V y H de la reacción, porque preferimos aproximarnos a la exposición que el autor del método original que criticamos, da en su «Mecánica elástica».

Si llamamos m_A al momento flector en la coronación del apoyo izquierdo y m_B al momento flector en la coronación del apoyo derecho (el empotrado) debidos a la actuación de la fuerza o peso P, en nuestro ejemplo, los momentos flectores tienen también las expresiones que pasamos a dar:

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= 2\, m_A \frac{z_1}{L}; \\
M_2 &= m_A \left(1 - \frac{z_2}{L}\right) + m_B \frac{z_2}{L} + P\,(L-i)\,\frac{z_2}{L} \\
M'_2 &= m_A \left(1 - \frac{z_2}{L}\right) + m_B \frac{z_2}{L} + Pi \left(1 - \frac{z_2}{L}\right); \\
M_3 &= m_B - 2 m_A \frac{z_3}{L}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad [II]$$

Aún cabe otras expresiones de los momentos flectores, como las

$$\left.\begin{aligned}
M_2 &= m_A + V z_2 \\
M'_2 &= m_A + V z_2 - P\,(z_2 - i) \\
M_3 &= m_A + VL - P(L-i) + H z_3
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad [III]$$

Y en el apoyo empotrado, la que sigue:

$$M_3 = m_B + Hz_3 \;; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [IV]$$

Todas ellas son sencillísimas transformaciones de las primeras expresiones que se ha dado de los momentos flectores, teniendo en cuenta que

$$\left.\begin{aligned} m_A &= -H\frac{L}{2} \\ m_B = -\frac{HL}{2} + VL - P(L-i) &= m_A + VL - P(L-i) \end{aligned}\right\} \ldots \quad [V]$$

Comentario sobre las expresiones que preceden

La valoración del trabajo elástico, con frecuencia se reduce a la estimación del correspondiente a las deformaciones por los momentos flectores. Otras deformaciones, como las originadas por los esfuerzos normales y tangenciales suelen en muchos casos (tales los corrientes de pórticos) despreciarse, por su pequeña participación en el trabajo elástico total. La precedente expresión [I], como se ha visto, tiene en cuenta solamente, por dicha razón, las deformaciones debidas a la flexión.

Pero, nos encontramos ante expresiones diferentes de los momentos flectores, y puede surgir la duda de cuáles debemos utilizar; por lo que, nos permitimos hacer los elementalísimos distingos o aclaraciones que pasamos a exponer.

Si conociéramos los valores V y H de las componentes de la reacción en la base del apoyo izquierdo o articulado del pórtico de nuestro ejemplo (véase la figura), es evidente que tendríamos en seguida los valores de los momentos m_A y m_B en las coronaciones de los pies derechos, con ellos relacionados por las expresiones [V]. El conocimiento de V y H o de m_A y m_B, nos permitiría valorar el trabajo elástico; y los resultados de ambas medidas (en función de las *fuerzas* V y H o de los *momentos* m_A y m_B) serían rigurosamente coincidentes. Por ello, sin dificultad alguna, podemos utilizar para *medir* el trabajo elástico como se ha dicho, los valores M_1, M_2 y M_3 dados por las expresiones [II], lo mismo que los que figuran en función de V y de H.

Mas siendo desconocidos los valores de las componentes V y H de la reacción, podemos calcularlos poniendo en función de ellas el trabajo elástico, mediante los teoremas de Castigliano. E igualmente podemos hacer el cálculo directo de m_A y m_B expresando en función de estos momentos el trabajo de la deformación.

Valores de los momentos flectores

Hemos operado para ello, sustituyendo en la expresión [I] del trabajo elástico, los valores de M_1, M_2, M'_2 y M_3 dados por las expresiones [II] de los momentos flectores, efectuando las integraciones y hallando e igualando a cero las derivadas respecto a m_A y m_B de la expresión del valor del trabajo elástico en función de dichos momentos obtenido.

Podemos hacerlo así, con el fundamento que consignan varios distinguidos autores, de los que voy a limitarme a citar a Föppl y su maravilloso texto de «Resistencia de materiales» (que, dicho sea entre paréntesis, tiene el buen gusto de no insertar la *falsa* expresión del trabajo elástico de cinco términos, que nuestro querido y admirado amigo y compañero el profesor Sr. Peña, movido por el culto a la más inveterada rutina, quiere, a la trágala, hacérnosla pasar por verdadera, sin más recurso que la débil fuerza de su autoridad técnica). En la página 166 de la traducción francesa del citado libro de Föppl (Enciclopedia Industrial, de Lechalas, París, 1901) se dice y justifica que, al calcular, hay muchas veces ventaja en descomponer en dos o más partes el sistema hiperestático que se considere, de forma que las fuerzas actuantes constituyan un sistema isostático, siendo las incógnitas las acciones moleculares relativas a las superficies de separación o división en partes del sistema hiperestático. Las derivadas parciales del trabajo elástico, respecto a esas incógnitas, son nulas.

Por ello, hemos descompuesto nuestro pórtico en tres partes (el dintel y los dos pies derechos) y hemos dado en las expresiones [II] los momentos en cada una de ellas en función de m_A y m_B. Llevados estos valores de los momentos flectores dados por las expresiones [II] a la [I] del trabajo elástico así dividido en tres sumandos, se obtiene la expresión sencilla y fácil de comprobar, del trabajo elástico en función de m_A y m_B.

La omitimos, por resultar algo larga, en consideración (que siempre me ha gustado guardar) a los tipógrafos, limitándonos a consignar sus derivadas respecto a m_A y m_B igualadas a cero y convenientemente simplificadas que dan el siguiente sistema de ecuaciones (expresiones [VI]):

$$4(1+K)m_A+(2-3K)m_B=-\left(4\frac{i}{L}-6\frac{i^2}{L^2}+2\frac{i^3}{L^3}\right)PL$$

$$(2-3K)m_A+(4+6K)m_B=-\left(2\frac{i}{L}-2\frac{i^3}{L^3}\right)PL$$

No damos los valores de m_A y m_B en función de PL, K é $\frac{i}{L}$; creemos preferible, en cada caso particular dar a K su valor numérico, lo que simplifica los cálculos notablemente. Así lo haremos en los casos de $K=1$, $K=10$ y $K=20$, que trataremos en lo que sigue. Eso, claro está, no es prohibir al lector que quiera, la satisfacción de hallar las expresiones generales de m_A y m_B resolviendo el sistema de ecuaciones dado por las expresiones [VI] que preceden.

Conocidos así los valores de m_A y m_B, tendremos los de los momentos en cualquier punto del pórtico por las expresiones [II] y los de las componentes V y H de la reacción en el pie derecho articulado, por las expresiones [V].

Un distingo que no está de más

Desde luego, ya tenemos datos bastantes para proseguir nuestro camino, que es el de llegar a calcular los valores de la masa elástica en las coronaciones de los pies derechos del pórtico de nuestro ejemplo. Y puestos a su averiguación, va a ver el lector la necesidad de una nueva aclaración, al propio tiempo que la *pesca* de un error del procedimiento que criticamos.

Las expresiones [II] de los momentos flectores no sirven para calcular las masas elásticas. Las expresiones [II] nos han dado los verdaderos valores de los momentos flectores en las coronaciones de los apoyos; pero si con sólo los valores de los momentos dados por esas expresiones [II] calculáramos los ángulos de giro, obtendríamos resultados completamente falsos. Vamos a verlo claramente. Fijémonos en la figura.

Si queremos hallar el giro en la coronación del apoyo izquierdo, podemos prescindir de éste; nuestro pórtico se reducirá al dintel y al apoyo empotrado, y tendremos en el extremo libre del dintel, además de m_A las componentes V y H de la reacción, que evidentemente influyen en el valor del giro. Son pues entonces de aplicación las expresiones [III] de los momentos y no las [II]. Si queremos calcular el giro en la coronación del apoyo derecho (el empotrado), prescindiremos del dintel y del apoyo izquierdo. No tendremos entonces más que una sencilla viga empotrada, en cuyo extremo libre actuarán m_B y las componentes V y H de la reacción; por lo que, será la adecuada para el cálculo del giro la expresión [IV] del momento flector, pero no la última de las expresiones [II].

Masa elástica en la coronación del pilar articulado

Hechas esas salvedades, pasamos a deducir el valor de la masa elástica en la coronación del apoyo izquierdo de nuestro pórtico, o sea, del articulado en su base, siguiendo lo advertido en lo que precede. La simple inspección de la figura hace innecesaria la elemental explicación de que el ángulo del giro de la sección de coronación del indicado pie derecho, vale teniendo en cuenta las expresiones [III] y [V]:

$$\varphi_A = \frac{1}{KEI}\left[\int_o^i (m_A + Vz_2)\, dz_2 + \int_i^L (m_A + Vz_2 - P(z_2 - i))\, dz_2\right] +$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_o^{\frac{L}{2}} (m_A + VL - P(L-i) + Hz_3)\, dz_3 =$$

$$= \frac{L^2}{KEI}\left[\frac{m_A}{L} + \frac{V}{2} - \left(1 - \frac{i}{L}\right)^2 \frac{P}{2}\right] +$$

$$+ \frac{L^2}{EI}\left[\frac{m_A}{2L} + \frac{V}{2} + \frac{H}{8} - \frac{P}{2}\left(1 - \frac{i}{L}\right)\right] =$$

$$= \frac{L}{2KEI}\left[m_A + m_B + Pi\left(1 - \frac{i}{L}\right)\right] +$$

$$+ \frac{L}{2EI}\left[m_B - \frac{m_A}{2}\right] \qquad \text{[VII]}$$

Como podemos calcular m_A y m_B por el sistema de ecuaciones [VI], podemos inmediatamente obtener el valor del giro φ_A dado por [VII], y por consecuencia, el cociente $m_A : \varphi_A$, que es la medida de la masa elástica que buscamos.

Masa elástica en la coronación del pie derecho empotrado

Análogamente se ha hallado la expresión del valor del giro de la sección de coronación del apoyo derecho de nuestro pórtico. Prescindiendo del dintel y del otro apoyo, tendremos actuando en dicha coronación el momento m_B y las componentes de la reacción V y H a dicha coronación trasladadas; y el giro de la sección que nos ocupa vendrá dado por:

$$\varphi_B = \frac{1}{EI}\int_o^{\frac{L}{2}} (m_B + H_{z_3})\, dz_3 =$$

$$= \frac{L^2}{EI}\left(\frac{m_B}{2L} + \frac{H}{8}\right) = \frac{L}{2EI}\left(m_B - \frac{m_A}{2}\right) \ldots\ldots \quad [\mathrm{VIII}]$$

Conocidos m_A y m_B fácilmente se deduce por [VIII] el giro φ_B; por consecuencia, obtenemos la masa elástica que nos proponíamos calcular, cuyo valor es el cociente $m_B : \varphi_B$.

Consecuencias de nuestro :: segundo ejemplo ::

Dije anteriormente que, iba a tratar los casos correspondientes a momento de inercia del dintel igual al de los pies derechos ($K = 1$), diez veces mayor ($K = 10$) y veinte veces mayor ($K = 20$) que el de éstos.

Los valores de los momentos flectores en las coronaciones de los apoyos de nuestro pórtico correspondientes, deducidos del sistema [VI], son:

Para $K = 1$

$$m_A = -\left(42\frac{i}{L} - 60\frac{i^2}{L^2} + 18\frac{i^3}{L^3}\right)\frac{PL}{79};$$

$$m_B = -\left(20\frac{i}{L} - 6\frac{i^2}{L^2} - 14\frac{i^3}{L^3}\right)\frac{PL}{79};$$

Para $K = 10$

$$m_A = -\left(39\frac{i}{L} - 48\frac{i^2}{L^2} + 9\frac{i^3}{L^3}\right)\frac{PL}{254};$$

$$m_B = -\left(25\frac{i}{L} - 21\frac{i^2}{L^2} - 4\frac{i^3}{L^3}\right)\frac{PL}{254};$$

Para $K = 20$

$$m_A = -\left(153\frac{i}{L} - 186\frac{i^2}{L^2} + 33\frac{i^3}{L^3}\right)\frac{PL}{1763};$$

$$m_B = -\left(100\frac{i}{L} - 87\frac{i^2}{L^2} - 13\frac{i^3}{L^3}\right)\frac{PL}{1763};$$

Hemos calculado los valores de dichos momentos flectores en cada caso para tres posiciones de la fuerza o peso P, causa única actuante (para $i = 0'1L$, $i = 0'5L$ e $i = 0'8L$); hemos deducido asimismo los ángulos o giros φ_A y φ_B correspondientes (expresiones [VII] y [VIII]), habiendo con dichos elementos hallado los valores de la masa elástica, que reunimos en el estado que sigue:

Coeficientes de $\frac{2EI}{L}$ en la coronación del apoyo articulado en su base, para los valores de K y de i que se expresa:

	K = 1	K = 10	K = 20
$i = 0'1L$	— 2'50	— 3'07	— 3'04
$i = 0'5L$	— 3'87	— 3'66	— 3'59
$i = 0'8L$	— 9'98	— 4'54	— 4'42

Coeficientes de $\frac{2EI}{L}$ en la coronación del apoyo empotrado en su base, para los valores de K y de i que se expresa:

	K = 1	K = 10	K = 20
$i = 0'1L$	+ 16'27	+ 3'91	+ 3'71
$i = 0'5L$	+ 2'57	+ 2'77	+ 2'80
$i = 0'8L$	+ 1'79	+ 2'28	+ 2'33

Como se ve, ni por casualidad hemos dado con el valor 3 para los pies derechos apoyados en la base, ni con el valor 4 para los que en su base tienen empotramiento en vez de articulación. La simple vista del precedente estado, basta para formar juicio de la *aproximación* del procedimiento de masas elásticas, que algunas revistas técnicas han pretendido apropiarse con injusticia notoria.

La cosa no es para menos.

Artículo segundo

(El autor tuvo la torpe ocurrencia de hacer unas notas simplonas que reunió en un a modo de artículo titulado «Breve comentario acerca de la inexactitud de una conocida expresión del trabajo elástico», que puede verse en el número de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS correspondiente al 1.º de enero de 1932. En el del 1.º de febrero siguiente, de la misma publicación, apareció un artículo de mi distinguido compañero el Sr. Dublang con la pretensión de refutar mi pobre trabajo. Hice una réplica, que el director de la REVISTA me *facturó* en seguida para Almería; a su indicación, repetí con este segundo artículo, que también vino para mi tierra en porte pagado (¡cuasi la ignominia!). Si el lector quiere que resulte algo animada la consideración de este modesto artículo, debe, primero, pasar la vista por mi «Breve comentario...» y por la refutación del mismo abundosa en desatinos de buena marca, que están en los números de la REVISTA citados).

Algo más acerca de la inexactitud de una conocida expresión del trabajo elástico

Cinco en persona, : uno en esencia :

Es muy de sabios y eminentes autores, hacer y razonar frecuentemente por cuenta de sus gloriosos predecesores en las nobles y plausibles tareas de la investigación y de la creación original. Poner en práctica lo que en el *argot* profesional y estudiantil llamamos despectivamente *fusilar*, satisface por igual a los grandes y a los chicos y es no menos razonable que humano; que sin esa *destreza* en el manejo de ciertas armas, toda obra progresiva que en nuestro mísero existir se iniciara, si vano escrúpulo y orgullosa necedad hicieran desdeñarla por parte de nuestros sucesores, difícilmente llegaría a alcanzar la conveniente madurez. Hay que *fusilar* y hay que hacerlo como es debido para que el verdadero progreso merezca serlo.

Con tal criterio, tan arraigado en mí, no he considerado temeraria ni mucho menos, la tarea de emprender la *ofensiva* contra las «Consideraciones sobre la fórmula de Castigliano» que un distinguido compañero me ha dedicado en artículo publicado en el número de la Revista del día primero de febrero, en el que, como de pasada, se me pone frente a los cinco eminentes antores, Castigliano, Müller-Breslau, Mohr, Zafra y Peña, al pretenderse la refutación de un trabajillo mío sobre el mismo asunto que el presente.

Valga de garantía a mi compañero Dublang, que lo que dije entonces, como lo que voy a exponer ahora, me lo han enseñado esos mismos cinco señores, singularmente nuestros compatriotas; que éstos no son ciertamente los autores de la inexactitud tachada, llegada de Italia o de Alemania, por obra y gracia de la *transcripción* excesivamente fiel, algo ayuna del arte del bien *fusilar*.

Una buena condición
: del trabajo elástico :

Para determinar un trabajo mecánico en general, precisa el conocimiento de una fuerza y de una longitud (el recorrido proyectado en la dirección de la fuerza o causa) más o menos ajenas la una a la otra; pero el trabajo molecular o de la deformación elástica, por la circunstancia de ser el recorrido o deformación función de la fuerza o causa (y viceversa), puede expresarse, como vamos a ver, en *función de las causas o de las deformaciones exclusivamente*.

Fijémonos en el caso sencillo de una barra de acero de longitud L y sección constante S suspendida por su extremo superior, de cuyo extremo inferior o libre colgamos un peso P. Sabemos todos que, por la acción de este peso, la barra experimenta un alargamiento (ΔL), cuyo valor, llamando E al coeficiente de elasticidad longitudinal del acero, es:

$$\Delta L = \frac{PL}{ES} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

de donde, inversamente, podemos deducir que la intensidad de la fuerza necesaria o peso capaz de producir el alargamiento ΔL vale:

$$P = \frac{ES}{L} \Delta L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [II]$$

El trabajo elástico, el trabajo desarrollado por la causa durante el proceso de la deformación, o energía por el mismo almacenada en la barra de acero, es, como sabemos,

$$T = \frac{P \, . \, \Delta L}{2}$$

Si sustituímos en este valor del trabajo ΔL por el valor del alargamiento dado por la expresión [I] obtenemos:

$$T = \frac{P^2 L}{2ES}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [III]$$

si en el mismo valor del trabajo sustituímos P por su valor, según la expresión [II], resulta:

$$T = \frac{ES}{2L} (\Delta L)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [IV]$$

expresiones que representan el trabajo elástico o energía acumulada, en *función de la causa exclusivamente* (la [III]) y en *función exclusivamente de la deformación* (la [IV]).

Esa buena condición, esa propiedad del trabajo elástico, digna del tratamiento de excelencia, es lo que ha permitido que se realice el portento de magia de la demostración de los teoremas de Castigliano.

Il teorema del Castigliano

Un compatriota del insigne autor piamontés lo enuncia de este modo: «Le derivate del lavoro di deformazione, espresso per gli spostamenti (o per le forza esterne), rispetto agli spostamenti (o rispetto alle forze), sono uguali alle forze (o agli spostamenti)».

Nuestro compañero D. Alfonso Peña, desdoblándolo, da como enunciado del primer teorema de Castigliano («Mecánica elástica», página 38 de la edición primera y 44 de la segunda edición) el que sigue:

A) Si se expresa el trabajo de deformación, en un sistema elástico, *en función de las deformaciones* que se producen en él, la derivada parcial de ese trabajo respecto a una deformación cualquiera, nos da el valor de la causa que la origina.

B) Si se expresa el trabajo *en función de las causas* que sobre el sistema actúan, la derivada parcial de aquél respecto a una cualquiera de esas causas da el valor de la deformación que producen.

Yo deduzco de la versión de Peña que, aplicando ese teorema de Castigliano, obtendremos *forzosamente* las fuerzas o causas, en función de *deformaciones* exclusivamente; y, de igual modo, los recorridos o deformaciones, en función de fuerzas o causas *exclusivamente* también. Así lo creo, no teniendo reparo alguno que oponer a su demostración, que nuestro admirado compañero hace con maestría sobrada. Voy, no obstante, a permitirme el pequeño lujo de una comprobación con ayuda de las expresiones [III] y [IV], a las que, por lo consignado, cabe aplicar correctamente, en sus dos partes, respectivamente, el teorema de las derivadas de Alberto Castigliano.

De la [III] resulta:

$\frac{dT}{dP} = \frac{PL}{ES}$ (que es el valor ΔL del recorrido o deformación según [I]).

De la [IV] se obtiene:

$\frac{dT}{d(\Delta L)} = \frac{ES}{L}\,\Delta L$ (o sea el valor P de la fuerza o causa según [II]).

Superabundante expresión del
:: :: trabajo elástico :: ::

Compare ahora el lector esas modestas expresiones [III] y [IV] con la que voy a escribir, bien que con el cambio de alguna que otra letra, tomándola de la página 38 de la edición primera de la «Mecánica elástica», de Peña; con la que me permití llamar en mi «Breve comentario...» *superabundante* expresión general del trabajo elástico, que es la

$$T = \frac{1}{2}\int_o^L \frac{N^2}{ES}\,dL + \frac{1}{2}\int_o^L \frac{M^2}{EI}\,dL + \frac{1}{2}\int_o^L \frac{\alpha C^2}{E'S}\,dL +$$

$$+ \int_o^L N\lambda_m\,dL + \int_o^L \frac{M(\lambda_1 - \lambda)}{2c}\,dL \,\ldots\ldots\ldots \quad [V]$$

En la [III] se expresa la energía acumulada en función *exclusivamente* de la causa; en la [IV] se da esa misma energía o trabajo elástico en función de la deformación *exclusivamente*. Pero la liberalota expresión [V] ya no está por el régimen de *exclusivas*, y en ella, *fuerzas* y *deformaciones* se mezclan en el más pintoresco y animado batiburrillo.

Y el mal no para ahí. El mismo Peña, que exige en la parte *B*) del primer teorema de Castigliano, que vaya expresado el trabajo elástico en función de las causas actuantes *exclusivamente*, despreocupadamente deriva la precedente expresión [V] en la que tal precisa condición no se cumple, obteniendo una expresión *falsa* del valor de la deformación o recorrido en función de *deformaciones y causas juntamente* como el que paso a copiar de la página 43 de la primera edición de su «Mecánica elástica»:

$$r = \frac{dT}{dR} =$$

$$= \int_{o}^{L} \frac{N}{ES} \cdot \frac{dN}{dR} dL + \int_{o}^{L} \frac{M}{EI} \cdot \frac{dM}{dR} dL + \int_{o}^{L} \frac{\alpha C}{E'S} \cdot \frac{dC}{dR} dL +$$

$$+ \int_{o}^{L} \lambda_m \cdot \frac{dN}{dR} dL + \int_{o}^{L} \frac{\lambda_1 - \lambda}{2c} \cdot \frac{dM}{dR} dL \quad \ldots . \quad [VI]$$

Si M, N y C representan los momentos flectores y esfuerzos en los distintos puntos de la estructura que se considere, debidos a la actuación del conjunto de *causas* (fuerzas, dilataciones, etc.), los dos sumandos finales de la expresión [V], evidentemente sobran; pero si se expresara el trabajo en función de las deformaciones, esos dos sumandos, íntimo consorcio de fuerzas y recorridos, también estarían de más. ¡Es triste condición privativa de lo superfluo e insustancial!

Síntesis grandiflora y camelus vulgaris

Puede que al lector curioso, le interese algo a modo de explicación, de lo anómalo que acabamos de poner de relieve, o que justifique la inconsecuencia que se desprende de las referencias al libro de nuestro admirado y querido compañero y amigo Alfonso Peña; por lo que, antes de pasar adelante, voy a intentar complacerle haciendo a mi manera los difusos comentarios que siguen.

Es innegable que se dan en todos los campos, existen en todas las latitudes, florecen en todos los climas, dos especies botánicas de extraordinario parecido y por lo mismo muy fáciles de confundir. Me refiero a la gran síntesis y al *camelo* vulgar. Sienten por las síntesis magnas los eminentes autores (y tanto más cuanto más grandes son) afición morbosamente aguda, predilección que raya en neurosis netamente acusada.

Así como en el particularísimo caso que tratamos, un autor adocenado cualquiera, se hubiera preocupado por darnos *dos expresiones* del trabajo elástico (una en función de las *causas* y otra en función de las *deformaciones* exclusivamente, como Dios manda, como el enunciado del teorema de Castigliano según Peña requiere), el autor eminente, paciente víctima de la neurosis del *sintetismo*, nos ha querido soltar todo a la vez, dárnoslo todo en *una sola* expresión como la [V], mal compuesto brebaje en el que causas y deformaciones entran como ingredientes; cosa que es, como si hubiera cogido por distracción del campo fértil de la investigación, en vez de una gran síntesis, un *camelo* vulgarísimo.

Véase otro enunciado de mi ejemplo fácil

Y... baste de comentario a la inexactitud de esa expresión [V], si es cierto que al buen entendedor no hay que decirle más de media palabra. Mejores o peores, puede decirse que ya llevo dos artículos sobre el tema harto trivial.

Me creo obligado no obstante a decir algo por vía de refutación, sobre el trabajo de nuestro compañero el Sr. Dublang, siquiera limite esa tarea para no pecar de excesivamente pesado, a acusarle los tres errores que he encontrado de más bulto en su artículo; pero no interprete mi proceder, como afán de rehuir la polémica, para la que públicamente o por correspondencia particular me tiene en absoluto a su disposición.

Pero, antes de la *ofensiva* contra el trabajo de Dublang, quiero en obsequio a mi distinguido contrincante, prestarle el buen servicio de darle otro enunciado del ejemplo fácil tratado en mi «Breve comentario...» (número de la REVISTA del primero de enero del corriente año). El elegante enunciado de mi sencillo problema, dado por Dublang en su artículo, es «Hallar el esfuerzo normal que se produce en una barra de acero, con extremos fijos, sometida a la acción única de un cambio de temperatura». Y yo me permito aconsejarle, que vuelva a examinar la cuestión, por la enorme claridad que para el procedimiento operatorio resulta, con este otro modo de decir: «Una barra de acero fija por uno de sus extremos, por reducción de la temperatura experimenta un acortamiento unitario λ (o λL en total); ¿a qué esfuerzo habrá que someterla, qué tracción habrá de aplicarse a su extremo libre para que no tenga acortamiento al descender la temperatura?».

Sobre la necesidad de tér- : minos con recorridos :

Al final del artículo de mi distinguido contrincante impera una obsesión extraña, una rara preocupación porque no falten en la expresión del trabajo elástico, términos en los que figuren *recorridos*. Parece dar a entender Dublang, que si no entraran expresamente las dilataciones en esos términos, no habría manera de calcular esas deformaciones.

Para no cansar, quiero limitarme sobre el particular, a recordar lo que ya sabemos; que para obtener *deformaciones* por la aplicación del teorema de las derivadas *del Castigliano*, mientras otra cosa no nos demuestren el Sr. Peña o el Sr. Dublang mismo, hay que disponer de una expresión del trabajo elástico en función de fuerzas o causas *exclusivamente*. Buena prueba de ello es la expresión [I] corroborada por la derivada de la [III].

No se concibe fácilmente ese capricho de mi contrincante, de poner λ en la expresión del trabajo de la deformación elástica, para permitirse la pequeña satisfacción de sacarla nuevamente como incógnita por el empleo del teorema de Castigliano, haciendo desempeñar de paso a la expresión del trabajo, el papel secundario de convertir por rara alquimia, los datos en cantidades desconocidas. Rara y extraordinaria complacencia, que culmina en la deducción asombrosa de que aún siendo nulo (constante) el trabajo elástico, tenga por derivada λL (cantidad distinta de cero).

¿Es negativo el trabajo acumulado?

Tanta o más *prestidigitación* que la que se necesita para hacer ver que la derivada de una cantidad constante es distinta de cero, precisa tener, para poder *acumular* energía con signo *negativo*. Es otra de las maravillas del artículo del Sr. Dublang, que éste nos exhibe puesto en la clave de la dificultad y manejando unas cosas que él llama consideraciones energéticas. El *truco*, vamos a ver que es inocentísimo, al ligero examen de este pequeño fragmento de su trabajo.

Pone nuestro compañero vertical la barra de acero con extremos fijos de mi «Breve comentario...» y fijándose en el extremo inferior, dice: Si la barra se enfría, se produce un esfuerzo de tracción que va hacia abajo; *al deshacer el enlace*, el extremo inferior corre hacia arriba y el trabajo *es negativo*. Yo digo que sí, que lo es evidentemente, *cuando se deshace el enlace* haciendo que la barra reintegre el trabajo que tenía acumulado. Pero, vamos *a hacer el enlace*, que es lo que importa al caso; la barra enfriada, tiene una longitud menor que la que media antes del enfriamiento; si queremos restituirla a su primera longitud, hemos de aplicarle un esfuerzo de tracción (hacia abajo) y provocar su alargamiento (hacia abajo también). Por lo que, el trabajo (que ahora sí que es el acumulado de verdad) resultará *evidentemente positivo*.

No es éste del signo del trabajo acumulado, el menos importante de los juicios poco atinados del trabajo en el que se ha pretendido refutar mi «Breve comentario.. » sobre la inexactitud de la superabundante expresión [V]. Si el Sr. Dublang me hubiera concedido algún crédito, si hubiera *podado* los dos sumandos finales o superfluos de esa expresión [V], hubiera tenido la expresión exacta del trabajo elástico; y ésta, no le hubiera permitido incurrir en el craso error que acabamos de poner de relieve. Efectivamente, la exacta expresión del trabajo elástico en *función de las causas*, la

$$T = \frac{1}{2}\int_{o}^{L} \frac{N^2}{ES}\,dL + \frac{1}{2}\int_{o}^{L} \frac{M^2}{EI}\,dL + \frac{1}{2}\int_{o}^{L} \frac{\alpha C^2}{E'S}\,dL \quad \ldots \text{[VII]}$$

nos está diciendo claramente que el trabajo acumulado es siempre esencialmente *positivo;* porque sean tracciones o compresiones las N, tengan los momentos M o los esfuerzos cortantes el signo *más o el menos*, los cuadrados de N, de M y de C, *son siempre positivos*, quiéranlo o no lo quieran, los Peña, los Zafra, los Mohr, los Müller-Breslau, los Castigliano, y opine Dublang desde la clave o desde los arranques de la dificultad cuanto en contrario se le antoje.

Una derivada que no es nula per se

Por no enojar a los eminentes autores, por el afán de dar como válido o querer hacer pasar por bueno el *camelo* de la inexacta expresión [V], mi contrincante en el sencillo ejemplo de mi «Breve comentario...», tan elegantemente enunciado por él, quiere justificar que el valor exacto del trabajo elástico o energía acumulada viene dado por la siguiente expresión,

$$E_\alpha = \frac{N^2 L}{2ES} + N\lambda L$$

que es la (4) de su trabajo, hija legítima de la inexacta (la *superabundante)* expresión [V], cuya derivada, respecto a N, afirma que es nula *per se;* y yo voy a probarle sencillamente, que tal derivada no es nula per se ni *per asomo.*

Efectivamente, si la fuerza N tiene por valor absoluto λES, tendremos que

$$\lambda = \pm \frac{N}{ES}$$

(pongo el signo positivo, que es el suyo, y el negativo, que es el que Dublang quiere que lleve; así hay para todos los gustos); valor que, sustituído en la anterior expresión, la convierte en la

$$E_\alpha = \frac{N^2 L}{2ES} \pm \frac{N^2 L}{ES} = \frac{N^2 L}{2ES}\left(1 \pm 2\right)$$

cuya derivada con relación a N, correctamente obtenida, *no es nula* aunque otra cosa puedan creer Dublang o Peña.

¡Distinguido compañero Dublang!: Al terminar, quiero darle las gracias por la distinción de haberme honrado con su artículo refutando mi anterior trabajillo; quiero repetirle, mi ofrecimiento y deseo de llegar a agotar el tema públicamente y en la Revista (si están para V. abiertas las columnas de nuestra publicación oficial, que a mí en ocasiones por motivos poco defendibles, se me han cerrado un tantico) o en correspondencia particular; quiero por último, que sin miedo a nada ni a nadie, *pode* esos sumandos finales de la *superabundante* expresión [V] del trabajo acumulado y utilice exclusivamente la exacta expresión [VII]. Ni Castigliano, ni Müller-Breslau, ni Mohr, ni Zafra, ni Peña se habrán de molestar con V. por tan pequeña cosa; y menos que todos ellos, el último, nuestro querido y admirado amigo y compañero Alfonso Peña, que habrá de agradecerlo, al encontrar en nuestro justificado proceder, motivo para la pertinente modificación del texto, en la edición tercera *correjida* y aumentada de su «Mecánica elástica».

Algunos toques estrambóticos en torno a una viñeta

(Esta parte del papel de envolver mis dos pobretones artículos descalificados, quería haberla hecho un poco grata al paladar; pero me ha salido una especie de solo de ocarina de esos de dos horas y media a tres. ¡Qué ganas de gastar saliva tuvo el preceptista latino cuando su pedagogía del «miscuit utile dulci» que tanto disgusta a los señores de la REVISTA! No suenen estos toques más que para los señores Dublang y Peña mis distinguidos compañeros. Prohibo *terminantemente* su lectura a todos los demás).

¡Cuánto debe dar de sí la vanidad de autor!

Mera naderia, cosa tan fútil como el simple adorno de la cubierta de este humilde folleto, no pudo lograrse sin el concurso de una *preocupación;* y me voy a permitir referirla al lector con todos sus pelos y señales, para que debidamente informado pueda formar juicio de la importancia desmesuradamente ridídula de tal vanidad.

Me pareció desde luego muy acertado, que fuera en la portada de mi folleto, la figura del primero de los dos artículos que había de contener (¡qué cosa mejor que un *pórtico* para una portada!); pero dejar esa figura sola en el *principal* de la cubierta, en el sitio que creí más adecuado para su colocación, francamente, lo encontraba un tanto desairado y reclamaba en mi sentir el aditamento en el *bajo derecha* de la misma portada, de cualquier viñeta al uso. Necesidad que hizo incontinenti surgir la indecisión molesta, la duda cruel...

¿Qué dibujito haría bien? ¿Qué figurita resultaría mejor en la cubierta de este pequeño folleto? Los socorridísimos sapos, ranas y hasta ratoncillos de biblioteca, tan vistos y sobradamente conocidos, no me parecieron cosa

seria ni pertinente; las flores de loto o de lis, lo mismo que las vulgares margaritas, andan de puro sobadas, tirando de su marchitez lo mejor que pueden; las consabidas parejitas de pescadores holandeses (macho y hembra) con sus correspondientes peces de colores, seguramente conseguirían con la mayor facilidad excitar la hilaridad de los señores del Comité redactor del *órgano* de los ingenieros de Caminos; el escudo del Cuerpo al que me honro en pertenecer, probablemente haría que el folleto semejara un número en tamaño chico de la Revista de Obras Públicas, lo que quizá pudiera hacer sospechar a algún malicioso, que con tal expediente pretendíamos la vuelta a la colaboración en dicho periódico al parecer deseada hasta no hace mucho tiempo, por su *dirigente* insigne.

En tan *complicado* trance, se comprende que fué mi deficiente memoria quien compasivamente acudió a sacarme del atolladero, por cuanto vino a poner fin a mi perplejidad, el recuerdo de las «Consideraciones sobre la fórmula de Castigliano», del artículo en el que me refutó D. Roberto Dublang (número de la Revista del 1.º de febrero de 1932), coincidente con mi «Breve comentario...» en la carencia de figuras; y al punto entró en mis cálculos hacer una, la correspondiente al sencillo ejercicio tratado por dicho distinguido compañero en su trabajo, y llevarla como se ha hecho a la cubierta del presente folleto convencido de que habría de desempeñar a las mil maravillas el papel de excelente viñeta.

¿No es verdad que acerté al fin y a la postre?

Me ocurre como a los malos poetas. Me arrastra con irresistible fuerza el *consonante*. Ya hecha la viñeta y colocada en la portada, entré en deseos de invitarla a pasar al *interior* del folleto para que corriera igual suerte que la figura del pórtico de nuestro primer artículo; pero ello requería componer cuatro notas para su acompañamiento, que justificaran como Dios me diera a entender, su presencia en mi recopilación de dos artículos *indeseables*. Tal fué el origen, de estos modestísimos *toques* sueltos y deslavazados.

¿Asunto para estos comentarios? Lo busqué en una nueva lectura del artículo del Sr. Dublang, en la parte para la que es útil la figurita, que en lo que sigue llamaré siempre la viñeta. Ahí podrá ver el lector con sus propios ojos, que entre afirmaciones enormemente desatinadas, está atemorizada y escondida, una verdad sencilla como todas hasta rayar en la perogrullada; en esa parte de su trabajo el Sr. Dublang nos dice, y yo estoy por creer que lo declara inconscientemente, que *puede haber deformaciones sin trabajo elástico*.

¡Claro que las hay! Naturalmente que existen deformaciones sin trabajo elástico que todos los ingenieros y hasta los profanos conocemos y tratamos. La misma barra de la viñeta, con su extremo inferior libre, sin otra acción que la actuación sobre ella de los cambios de la temperatura ($F = o$) se dilata o se contrae sin que el *trabajo elástico* aparezca en modo alguno, análogamente a lo que acontece en el tramo metálico sometido a la acción de la temperatura exclusivamente, cuando está sobre aparatos de dilatación y apoyo cuyo objeto es impedir que ese trabajo se produzca.

Quiero que el lector no vaya a enojárseme por la insistencia en remachar cosas tan de clavo pasado. Tenga la evidencia de que me obligan a hacerlo así sospechas muy fundadas y datos de puño y letra de algún *maestrazo* de esos que se insolentan si se les invita a la discusión.

Amigo lector: El concepto de trabajo elástico, es de lo más sencillo; pero los super-genios del profesorado y de la enseñanza de Resistencia de materiales (conste que no todos ni mucho menos), lo han complicado con el *camelo* que en mi «Breve comentario...» traté de sacar a la vergüenza pública. La esencia del trabajo elástico, el nervio y la fibra de su concepto, con un ejemplillo demostrativo, va al comienzo del segundo artículo de este folleto. No obstante, he querido hacer que la viñeta nos ayude a fijarlo; que por lo visto, varios eminentes autores y otros que no lo son y quieren hacerse pasar por buenos, no tienen concretas ideas sobre el particular, y sin querer nos meten en un mar de confusiones a las primeras de cambio.

El sencillo problema del Sr. Dublang al que la viñeta corresponde, es: Calcular el trabajo elástico y las deformaciones en el caso de una barra de acero sujeta por su extremo superior y libre por el inferior, sometida a una fuerza normal F y a una dilatación unitaria λ provocada por un aumento de la temperatura. Y vamos a resolverlo, considerando *sucesivamente* el trabajo acumulado en la barra por una o la otra de dichas causas, actuando separadamente.

Sabemos que la barra de longitud L, sección constante S y coeficiente de elasticidad longitudinal E, sometida solamente a la acción de la fuerza normal F, tendrá un alargamiento; y que después de alargada, su longitud es

$$L + \frac{FL}{ES} = \left(1 + \frac{F}{ES}\right) L; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mas si antes de actuar la fuerza normal F sometemos la barra a la acción de la temperatura provocando el alargamiento unitario λ, sería su longitud dilatada (antes de la actuación de F)

$$L + \lambda L = (1 + \lambda) L$$

y vendría medida su longitud después de someterla a la acción de F (1) por

$$\left(1 + \frac{F}{ES}\right)(1 + \lambda) L$$

Tendremos pues en el primer caso un alargamiento

$$\frac{FL}{ES}$$

y en el segundo, un alargamiento *debido a la fuerza F también,* cuyo valor

$$\left(1 + \frac{F}{ES}\right)(1 + \lambda) L - (1 + \lambda) L = \frac{F}{ES}(1 + \lambda) L$$

es aproximadamente (con pequeñísimo error relativo en los casos prácticos corrientes, como en ellos lo es la relación de λ a la unidad) el mismo

$$\frac{FL}{ES}$$

deducido al actuar solamente F sin dilatación alguna.

No habiendo más que la actuación de F, no existiendo la dilatación unitaria λ provocada por la temperatura, el trabajo elástico o energía acumulada en la barra (en las conocidas condiciones de aplicación gradual del esfuerzo), tiene por valor como sabemos:

$$T = \frac{1}{2} F \frac{FL}{ES} = \frac{F^2 L}{2ES}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

pero si actúa, según los datos del problema, además de la fuerza F la variación térmica que da el alargamiento unitario λ, podremos proceder a la medida del trabajo elástico, como anteriormente dijimos.

Nada se opone a que habiendo de considerar la actuación sucesiva de las causas, principiemos por estimar el trabajo debido al aumento de la temperatura. Por ésta, la barra experimenta un alargamiento

$$\lambda L$$

(por ser λ como se ha dicho repetidas veces, la dilatación unitaria) y el trabajo elástico es rigurosamente nulo por no existir fuerza alguna. Estamos de lleno en el caso de deformociones sin trabajo elástico que *descubrimos* en el artículo del Sr. Dublang.

Si ahora en la barra dilatada hacemos que actúe la fuerza normal F, como por ésta habrá nuevo alargamiento que ya medimos con gran aproximación por

$$\frac{FL}{ES},$$

la energía acumulada debida a la acción de F vendrá dada por (2) como en el caso de actuar solamente dicha fuerza.

Tenemos resuelto el problema sencillo que nos ocupa. El alargamiento de la barra de la viñeta sometida a la fuerza normal F y a la dilatación unitaria λ provocada por la acción de la temperatura, vale

$$\frac{FL}{ES}\lambda L$$

y el trabajo elástico o energía acumulada por la actuación de las mismas causas viene dado por

$$T = \frac{F^2 L}{2ES}$$

El autor tiene por irreprochable la demostración que precede. Téngase en cuenta su propósito de no complicar con *camelo* alguno la simple noción, el fácil concepto de trabajo elástico. Mas como no puede evitar el autor, que haya por el mundo eminentes profesores casi tan duros de mollera como de apellido, ni que existan libros de texto en los que se da una expresión *falsa* del trabajo elástico, va a permitirse repetir la resolución del sencillo problema de D. Roberto Dublang; pero esta vez, *camelísticamente*, con licencia del benévolo (y del malévolo) lector, para destacar el error que se comete.

La cosa es sencillísima de hacer. Con que actúe en primer lugar en la barra de la viñeta la fuerza F, estamos al cabo de la calle. Haya mucha atención, para que el *camelo* pueda examinarse en sus más mínimos detalles.

Sometida la barra exclusivamente a la fueza F, tiene un alargamiento

$$\frac{FL}{ES}$$

y la energía por tal causa acumulada en la misma, viene medida (2) por

$$T = \frac{F^2 L}{2ES}.$$

Hagamos entonces actuar la temperatura: ésta, al aumentar, producirá el alargamiento unitario λ; por lo que la longitud de la barra será

$$\left(1 + \frac{F}{ES}\right) L (1 + \lambda) = L + \frac{FL}{ES} + \lambda L + \frac{\lambda LF}{ES}$$

o sea (con gran aproximación o muy pequeño error relativo), que habrá tenido un aumento de longitud de

$$\frac{FL}{ES} + \lambda L,$$

como ya hemos calculado, por el conjunto de las dos causas actuantes.

La deducción de la energía acumulada merece párrafo aparte. Durante la dilatación, según los autores del... *camelo,* se produce un trabajo elástico que tiene por valor

$$F\lambda L;$$

es decir, el producto de una fuerza, por un recorrido o deformación *que ella no produce*, que es completamente ajeno a su actuación, ya que durante la dilatación de la barra, la fuerza F no hace otra cosa que *dejarse llevar,* como si dijéramos. Tal como dichos autores se explican, el engaño es muy fácil. Vea el lector el párrato penúltimo de la página 80 del tomo I del «Cálculo de estructuras» de nuestro admirado maestro Zafra, y se convencerá de ello.

Es completamente falso, que el $F\lambda L$ sea una cantidad que deba añadirse al trabajo elástico debido a la actuación de la fuerza F medido por

$$T = \frac{F^2 L}{2ES}$$

según se ha demostrado, dicho y repetido. Durante la dilatación, ya consideremos ésta en primero o en segundo lugar, al resolver el ejercicio sencillo de nuestro distinguido compañero el Sr. Dublang, el *trabajo elástico* es rigurosamente nulo por lo que vamos a aclarar.

La existencia del trabajo elástico requiere, obligadamente, que las cargas unitarias de trabajo, tensiones o reacciones moleculares en cada punto del sólido o estructura elástica que se considere, *tengan variación.* Si la estructura o el sólido están sometidos a fuerzas exteriores que hagan variar el valor de la intensidad de esas tensiones unitarias, podremos evidentemente medir el trabajo acumulado por la deformación elástica, equivalente, como sabemos, al de las causas o fuerzas exteriores.

En nuestro caso del ejemplo sencillo del Sr. Dublang, vaya al comienzo o al final la consideración de la dilatación unitaria λ, bien fácil es ver, que no se acumula energía alguna en la barra por la elevación de la temperatura (hablamos de trabajo almacenado por la deformación elástica exclusivamente). Prescindiendo del peso propio de la barra, antes de la actuación de F, las tensiones son nulas en dicho sólido y nulas siguen siendo aunque el calor actúe, hasta la acción de la fuerza F. Esta hace que las cargas unitarias por la tracción simple debida a dicha fuerza, se eleven a

$$\frac{F}{S};$$

pero si la actuación de F tuviera lugar primero que la dilatación, resultaría que por dicha fuerza alcanzaría la tensión el valor indicado

$$\frac{F}{S}$$

que *no tendría modificación ninguna* durante el proceso de la dilatación, lo cual permite afirmar, que de todos modos no hay más trabajo acumulado en la barra del sencillo ejercicio que tratamos, que el dado por la expresión (2).

Duda el autor, con motivos completamente serios para dudar, que lo que acaba de exponer pueda ser debidamente comprendido. El lector debe ser tolerante con tal declaración sincera y juzgar sobre lo que pasamos a decir.

En el «Breve comentario acerca de la inexactitud de una conocida expresión del trabajo elástico» (número del 1.º de enero de 1932, de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS), tratábamos de sostener que la exacta representación del trabajo elástico es

$$T = \frac{1}{2}\int_o^L \frac{N^2}{ES}\,dL + \frac{1}{2}\int_o^L \frac{M^2}{EI}\,dL + \frac{1}{2}\int_o^L \frac{\alpha C^2}{E'S}\,dL; \ \ldots \quad (3)$$

cosa que no constituye descubrimiento mío, que jamás me permití, como saben todos, ni inventar cosas de sustancia como los estudios originales sobre los que versa el primer artículo de este folleto, ni eclipsar a ninguna estrella.

Pero, a pesar de ello, los ingenieros *bien* que tienen por dogma la «Mecánica Elástica» de Alfonso Peña, tomaron a mal que yo podara y dijera que la falseaban, los dos términos más que en dicho libro, como en otros varios, se adicionan a la preinserta expresión (3), que es la [VII] de nuestro segundo artículo del presente folleto; y no faltó un profesor que me escribiera desde un pueblecito próximo a Belchite, sosteniendo porque sí (porque lo decía él) que faltaban en (3) los términos o sumandos de las dilataciones que yo había dicho que hacían *superabundante* la expresión del trabajo elástico, en mi «Breve comentario...» Cosa que sigo sosteniendo, pese al *maestrazo*, que en su carta me daba prueba documental de que no sabía distinguir las deformaciones de las fuerzas o causas. Confusión, merecedora de que se le ponga en cualquier Academia científica, por si puede hacer algún descubrimiento sorprendente desde sabia poltrona...

Parece que fué el mío buen olfato, que vi venir sobre el citado artículo el chaparrón de ignorancia aludido, cuando empleé para justificar la tesis de mi «Breve comentario...» el procedimiento *por deducción* *del absurdo* que vamos a volver a emplear para un nuevo comentario al ejemplito sencillo del Sr. Dublang muy a tono con la elementalidad de estos pobres *toques*.

Demos por bueno que el trabajo elástico o energía acumulada en la barra de la viñeta, en el ejercicio fácil del *trabajo* del distinguido compañero, tenga por expresión

$$T = \frac{F^2 L}{2ES} + F\lambda L, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

que justamente es la expresión de igual número de su artículo refutándome.

Como se ha dicho más de una vez en estos *toques*, el recorrido del punto de aplicación de F o alargamiento de la barra en cuestión, se compone evidentemente de dos partes: el alargamiento por la acción de F y la dilatación λL por el aumento de la temperatura. Este último, es un dato del problema, y el primero tiene por valor (expresión 2)

$$\frac{dT}{dF} = \frac{FL}{ES};$$

luego el valor total del recorrido, es por consecuencia

$$\frac{FL}{ES} + \lambda L$$

coincidente justamente con la derivada respecto a F de la *falsa expresión* (4) del trabajo elástico, lo que hace que el distinguido compañero tenga por buena la superabundante expresión de dicho trabajo dada por Castigliano (estoy copiando del Sr. Dublang), Müller Breslau, Mohr, Zafra, Peña y otros eminentes autores declarados infalibles al tiempo de refutarme.

Falta de cautela, imperdonable candidez, que a renglón seguido le lleva a cometer este negro atentado contra los más elementales rudimentos del análisis infinitesimal: mi distinguido contrincante afirma, que al ser F nula, el trabajo elástico o energía acumulada en la barra de la viñeta (expresión 4) *es también nulo;* sin embargo (dice), la derivada *no lo es* dando el valor λL para el recorrido.

Tamaño desatino, el disparatado desliz de haber *demostrado* (utilizando el teorema de Castigliano, que es lo *irreverente* del caso) que la derivada de una cantidad constante es diferente de cero, constituye sobrado mérito como para haberse ganado la dedicatoria de este folleto (¡otra vanidad de autor!); pero no puede dejar de comprender su modesto autor, que está por la justicia en la mayoría de los casos, que siente verdadera complacencia en poder desagraviar públicamente a su distinguido refutante, que la enormidad no fué obra exclusiva de D. R. Dublang, ya que esa y otras inconveniencias apuntadas en nuestro artículo segundo fueron dictadas por un exceso de devoción a unos cuantos eminentes autores.

¡Cómo ha de ser!

Estos modestos toques *tocan* a su fin. Este solo de ocarina me tiene mucho más cansado que al heroico lector que se haya permitido llegar hasta estos renglones. Yo le doy mi palabra, de no hacer ni más folletos ni más viñetas directas inspiradoras de la nítida pesadez que tanto agradaba a nuestros clásicos de la afición a la lectura. Si vuelvo a la imprenta con algo, tendrá que ser con alguna *producción* de esas que producen siquiera una peseta cincuenta céntimos por ejemplar. Cansar al lector hasta el aburrimiento mediante un modesto desembolso de pesetas, que ahora están tan problemáticas, tiene todas las características de la majadería.

Harto de lamentar es, que esa traba de la pesadez, haya venido a estorbarme el buen propósito de la conveniente aclaración del concepto de trabajo elástico, tan maltratado por tanto y tan eminente profesor, sin exceptuar los más conocidos de casa. Bien que, sobre el ejemplo sencillo del Sr. Dublang se ha podido decir bastante, gracias a la viñeta del bajo derecha de la portada del presente nimio folleto; pero es el ejercicio comentado, copia de todas las posibles simplificaciones del caso. Efectivamente, hay una sola fuerza normal actuante, produciendo tracción simple, y no hay obstáculo alguno a la libre dilatación de la barra.

Sabido es que múltiples causas como el fraguado, las variaciones de la temperatura y otras varias, con la alteración del volumen, producen *deformaciones* de los sólidos y estructuras; pero dichas deformaciones no siempre originan trabajo elástico. Si no encuentran obstáculo alguno (como en el caso del sencillo ejercicio de mi distinguido refutante), si no hay alteración de las tensiones unitarias a causa de esas deformaciones por no estar impedidas, no puede haber trabajo elástico debido a ellas.

Para que por *deformaciones* haya trabajo elástico, es preciso que los enlaces presenten obstáculos a la libre deformación del sólido o estructura que se considere, que surjan *reacciones* en los apoyos o sustentaciones. Reacciones que, en definitiva, a la hora de determinar los momentos flectores y los esfuerzos normales y tangenciales, desempeñan idéntico papel al de las fuerzas exteriores, pesos o causas análogas, dado que son de la misma naturaleza que éstas. El caso tratado en mi «Breve comentario...», la barra con extremos fijos sometida a contracción por la baja de temperatura, problema que debe a nuestro compañero Dublang un elegantísimo enunciado (véase el segundo artículo del folleto), vendría aquí como anillo al dedo para complemento de nuestras modestas aclaraciones del concepto de trabajo elástico; pero ¡ya es tarde para hacer otra viñeta y llevarla al bajo izquierda de la portada. Decididamente, quiero acabar ya.

En el estado elástico plano, según el procedimiento corriente de teorizar, no cabe otras deformaciones que las originadas por los momentos flectores *(M)* y los esfuerzos normales *(N)* y tangenciales o cortantes *(C)* en los diferentes puntos de los sólidos o estructuras elásticas a estudiar.

Ya dijimos que es la expresión (3) la valoración exacta del trabajo elástico o energía acumulada en los sólidos o estructuras. Lo es, por comprender *todos* los componentes del trabajo elástico total. Su primer sumando nos da la parte que en el trabajo de la deformación total corresponde a los esfuerzos normales (tracciones o compresiones); el sumando segundo reúne los trabajos elementales por los giros debidos a los momentos flectores; por último, el sumando final mide el trabajo respectivo a los esfuerzos cortantes o tangenciales en la totalidad de la estructura. Y en esos *N, M* y *C,* entran lo mismo las fuerzas exteriores actuantes, que las reacciones en los apoyos o sustentaciones. Y hay que tener en cuenta que, en general, esas reacciones son originadas por el conjunto de dichas fuerzas exteriores y de las deformaciones por otras causas que resultan más o menos parcialmente impedidas por los enlaces o sustentaciones.

Por ello sostuve, que el aditamento a la expresión (3) de otros términos, de ese par de sumandos en los que se da entrada a las deformaciones, sin justificación ninguna, nos lleva al famoso pentanomio de la

«Mecánica elástica» de Alfonso Peña y de otros estimados textos de Resistencia de materiales, que puede a boca llena afirmarse que es *completamente falso,* por lo que llevamos manifestado partiendo del *hallazgo* en el artículo de nuestro distinguido Sr. Dublang, de que existen deformaciones sin energía acumulada.

¿Por qué razón, entonces, esa resistencia a aceptar el valor exacto del trabajo elástico, que es lo representado en el trinomio (3)?

Yo diré al lector que se comprometa a guardarme el secreto, que esa razón es, que el conocido teorema de Castigliano de la derivada del trabajo elástico, lo tienen por digerir muchos eminentes *de cuño falso;* que éstos, no saben trabajar con tan excelente herramienta, si no suplementan esos injustificados términos con las deformaciones, para sacar de la exacta expresión (3) una que resulta más falsa que Judas.

Errata de buena fe

Titular gansada aunque lo fuera, a esta mi colección de dos artículos, resultaría cosa asaz inconveniente. No obstante, pretendí llamarla algo por el estilo, con ayuda de una palabra extranjera, confiando el encargo a un excelente amigo al que suponía bastante ducho en el alemán, que me facilitó ese *schwanengesang* que encabeza la cubierta del folleto.

Después me he podido informar que por trueque de palmípedas hecho seguramente de buena fe, se ha convertido la *gansada* en poético *canto de cisne*, muy ajeno a mi propósito; pero es el folleto tan poquita cosa, que me resulta indiferente el texto de la portada.

Cada uno puede llamarle como quiera, y yo agradeceré al lector que corrija el título a su gusto, ya que, si quiere, habrá de hacer la corrección por su exclusiva cuenta.

Quede con Dios.

ÍNDICE