solo 120 ejemplares

ALGUNAS CONSIDERACIONES

SOBRE EL

ENLACE GEODÉSICO

Y

ASTRONÓMICO

DE

ARGELIA CON ESPAÑA

POR EL

CONDE DE CAÑETE DEL PINAR

CAPITÁN DE FRAGATA RETIRADO

MADRID: 1894

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE RICARDO ÁLVAREZ

15, Ronda de Atocha, 15

Teléfono 809.

ALGUNAS CONSIDERACIONES

SOBRE EL

ENLACE GEODÉSICO Y ASTRONÓMICO

DE

ARGELIA CON ESPAÑA

ALGUNAS CONSIDERACIONES

SOBRE EL

ENLACE GEODÉSICO Y ASTRONÓMICO

DE

ARGELIA CON ESPAÑA

POR EL

CONDE DE CAÑETE DEL PINAR

CAPITÁN DE FRAGATA RETIRADO

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE RICARDO ÁLVAREZ
15, Ronda de Atocha, 15
1894

Tirada de 120 ejemplares.

Ejemplar núm. 28

Dedicado

á el Excmo Sor Contralmirante Don

Manuel Fernandez y Coria

Jerez de la Frontera 8 Junio 1894.

AL SEÑOR

Don Rafael Pardo de Figueroa y Serna,

CABALLERO PROFESO DE LA ORDEN DE SANTIAGO

Con triple causa te corresponde ser la persona á quien yo dedique el presente trabajillo; por la semisecular amistad que nos une y que hoy espero sea por tu parte fuente de indulgencia, también por tu maestría en achaques geodésicos y astronómicos teóricos y prácticos, y principalmente por ser tuya la inconsciente iniciativa, ya que me proporcionaste el interesante libro cuyo análisis atrevidamente he bosquejado. Acéptalo por consiguiente como cosa debida, aunque desapruebes, cual yo, la rudeza de su forma, hija de mi falta de literatura y de mi sobra de habitual esclavitud á la concisión matemática; pues en el fondo y en el conjunto admiro á los directores y colaboradores de tan titánica científica empresa. Al amparar lo que encuentres bueno (si es que algo bueno hay en mi prolijo esbozo) ten en la memoria el constante afecto de tu antiguo camarada,

El Conde de Cañete del Pinar.

ÍNDICE

PRÓLOGO

El excelentísimo señor Conde de Cañete del Pinar ha verificado el siguiente interesantísimo trabajo sin ayuda de nadie y en poco más de un mes. Esto, con ser en mi concepto asombroso, no puede dar idea completa de sus excepcionales condiciones como algebrista y como calculador á las personas entendidas en estos asuntos, si no saben además que el Conde no se ha ocupado de alta geodesia (fuera de su educación clásica) hasta el momento en que le dije si vería con gusto el libro objeto de su actual crítica, tan honda y tan clara.

Acababa de medir entonces, poco ha, apoyándose en la triangulación de la Comisión Hidrográfica, sin el menor auxilio de otra persona, desenterrando vértices perdidos y con mil trabajos y con un teodolito que lee de minuto en minuto, una pequeña red de triángulos (desde el Puerto de Santa María y Jerez hasta Chipiona) por el gusto de calcular las posiciones geográficas de algunas casas de campo de su propiedad y otros puntos del término de Jerez de la Frontera; y en su amor á la exactitud y al trabajo mental, sea matemático ó de otro género, compensó *por sí solo* el heptágono topográfico fundamental para su objeto, llevando la aproximación de sus datos hasta más allá del segundo y en cuenta los excesos esféricos, pues aunque no ignoraba que llegarían á la decena de segundos los errores probables de los ángulos compensados ni que podía tachársele de *cominero,* superó á todo su placer en manejar números, según me decía, y en que no dependiera de falta de diligencia el más mínimo error de sus resultados, que fueron admirables, tanto por lo que atañe al observador como al calculista.

Metido momentáneamente en topografía, superior que digamos y quizás única, quien había sido en su juventud brillante oficial de la Armada, jefe de la Comisión hidrográfica de Filipinas y director de la Academia de estudios superiores de Marina, y que con igual aptitud entiende de las cuestiones vinícolas ó profundiza la teoría y práctica del incomparable sextante de reflexión, el más bello, útil y difícil de los instrumentos astronómicos, ó aplica el cálculo de probabilidades á complejos juegos de azar, ó juzga de las artes del toreo y la equitación, que dirige la derrota de un barco, regula teóricamente la de los huracanes de Filipinas, ó el curso de aquellas complicadas mareas, ó construye relojes solares, llevando en cuenta la diferencial del horario, dependiente de la refracción astronómica, ó es consumado fotógrafo, etc., etc., etc., le dije entonces si quería ver el libro que, sin presumirlo yo, ha dado ocasión al presente trabajo, indicándole, es cierto, algunas páginas no entendidas por mí y alguna obra de alta geodesia menos antigua que la que cursamos juntos en las escuelas de Marina.

He creído conveniente que conozcan los lectores (y principalmente los que hayan tenido parte en el libro objeto de la crítica) á quien censura lo que juzga endeble con igual sinceridad y llaneza que alaba lo grande del trabajo en general y la excelencia de la longitud astronómica, y se extasía ante las dificultades vencidas y la bondad de las observaciones geodésicas, siendo el mismo superior concepto que tan en justicia le merecen los ocho ángulos medidos (cuatro por España y cuatro por Francia), otros tantos acicates para ahondar su estudio.

Quien bosqueja este prólogo conoce directamente ó por referencia íntima y debe favores impagables, continuados y directos á algunas personas que quizás hayan intervenido en la redacción censurada por Cañete, y también conoció á quien ya no vive y á quien tanto debe España en uno de sus mayores y más útiles empeños científicos. Su memoria me es grata además por las atenciones personales que le debí en pro de un trabajo que me estaba encomendado y también por el afecto con que recibió y utilizó algunas indicaciones teóricas, que casualmente pude hacerle, enderezadas al mayor lustre de su obra, y entiendo que si pudiera ver las actuales del señor Conde de Cañete del Pinar y las juzgara tan razonables como yo las juzgo, ordenaría el recálculo más delicado y cuanto fuera conducente á dar el brillo y lugar que merece á la ocasión geodésica más grande que vieron los pasados, han visto los presentes y probablemente verán los venideros, y para que sirviese á estos de norma y dechado. Y entiendo que lo haría con tanta mayor satisfacción (aun cuando la geometría y la verdad sean cosmopolitas) por cuanto las luces vienen ahora de un geodesta español.

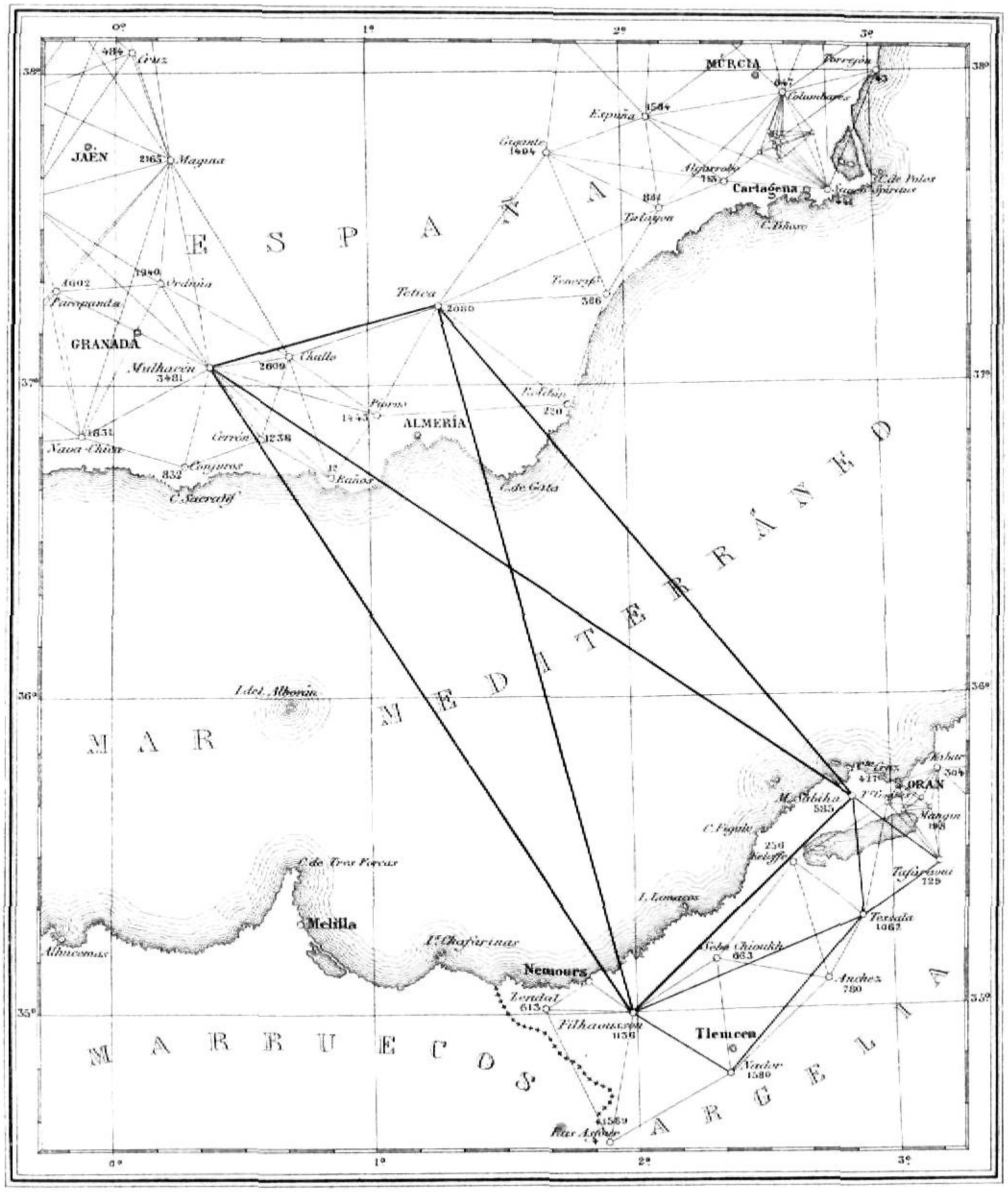
Rafael Pardo de Figueroa.

Puerto Real, Domingo de Pascua de 1894.

«Para la determinacion de la figura de la Tierra..... Reyes sabios y circunspectos..... han expendido sumas increibles, y hombres hábiles..... han emprendido gustosos, por espacio de mas de cuarenta años, los mas trabajosos afanes, solo por averiguar esta verdad; peleando á porfía la incomparable magnificencia de los Monarcas con la zelosa obediente diligencia de los Vasallos, por hacerse útiles, no solamente á la Patria, sino tambien á todo el resto del Orbe.„

(Don Jorge Juan, *Observaciones en los Reynos del Perú, 1773.)*

Enlace geodésico y astronómico
de Argelia con España.



Escala de $\frac{1}{2.640000}$

0 50000 100000 150000 200000 metros

CAPÍTULO PRIMERO

LIGERA RESEÑA HISTÓRICA

La determinación de la figura y dimensiones del globo que habitamos constituye, desde hace siglos, un problema que todavía está por resolver ó que está resuelto de manera que no satisface al ansia de exactitud que distingue á nuestra época, ni corresponde, por falta de observaciones suficientes, á los adelantos y progresos obtenidos en las ciencias y en los instrumentos de precisión. Bessel, Bowditch, Clarke, Paucker, Ritter, Schubert, Struve y otros autores, hacen distintas hipótesis ó hallan diversas constantes. Aun los que convienen en la hipótesis del elipsoide de rotación no reconocen los mismos valores para sus dimensiones: unos adoptan el elipsoide de Bessel, otros el de Struve, aquellos el de Clarke, ínterin no ocurre nueva determinación más autorizada, que sea preferible á las que hoy conocemos.

Uno de los datos más adecuados para perfeccionar el conocimiento de la figura y dimensiones de la Tierra, la medición de grandes arcos de meridiano, requiere el concurso de varios países y el trabajo de muchos años. El de la Europa occidental fué prolongado hace más de medio siglo por Biot y Arago, que llevaron la meridiana de Francia hasta las Baleares, uniendo geodésicamente, por enorme triángulo, la isla de Ibiza con la costa española, y previeron entonces la posibilidad de que, andando el tiampo, se podría llegar más al Sur, cuando en España se hiciera una triangulación completa, y aun alcanzar, al través del Mediterráneo, la costa septentrional del Africa si algún día nuestra civilización europea imperaba en aquellas regiones.

Más adelante ligó Francia por el Norte su triangulación con la de Inglaterra, y hace algunos años que el Instituto Geográfico cubrió nuestro territorio con red de triángulos que, por los Pirineos, ligó con la de Francia. Mientras tanto la Argelia, convertida en colonia francesa, fué también triangulada, y ya se empezó á pensar en la posibilidad de unir geodésicamente Argelia con España, por medio de algunos triángulos gigantescos que atravesaran el Mediterráneo, realizando así el sueño grandioso de Biot y Arago y completando la medición de un arco de meridiano con 28° de amplitud desde las islas Shetland, situadas al Norte de Escocia, hasta los confines del Sahara en Africa.

Desde 1835 comenzaron á formularse aspiraciones para la ejecución de este importante proyecto, y ya en 1878 los Gobiernos de España y Francia decidieron de común acuerdo llevarlo á cabo, comisionando al efecto por parte de España al Instituto Geográfico y Estadístico dirigido por el general Ibáñez, y por parte de Francia á una Comisión del Servicio Geográfico del Ejército bajo las órdenes del Coronel Perrier.

En el estío del mismo año se practicaron por uno y otro lado reconocimientos locales y detenidos estudios, de los cuales resultó el plan de formar un gran cuadrilátero de enlace entre los dos continentes, con dos de sus vértices en España (Mulhacen y Tetica) y los otros dos en Argelia (M'Sabiha y Filhaoussen).

No es mi ánimo hacer una historia detallada de este memorable acontecimiento, que ya la hay publicada (*)

(*) Publication internationale.—Jonction *géodésique et astronomique de l'Algérie avec l'Espagne, executée en commun en 1879, par ordre des Gouvernements* con todo lujo y esmero por los mismos jefes que la dirigieron; pero como habrá algunos lectores que no conozcan esta interesantísima *Memoria,* relataré ligeramente lo preciso para hacer comprender toda la magnitud é importancia del asunto, ya que en ellas me he de apoyar más adelante, para justificar la escrupulosidad severa y la *cominería* aparente que empleo en el análisis y estudio de algunos de sus cálculos, principal objeto del presente escrito.

El triángulo que midieron Biot y Arago para la unión de las Baleares con nuestra Península, citado en las obras de geodesia, por su excepcional magnitud, tenía su lado mayor de 161 kilómetros. Los triángulos que ahora se trataban de medir para el enlace de Argelia con España tenían lados de 270 kilómetros; por esto dice oportunamente la *Memoria* que los lados del cuadrilátero transmediterráneo tienen longitudes nunca antes alcanzadas y que nunca quizás serán sobrepujadas (*). Las nieblas sobre el mar, y la atmósfera empolvada de la costa de Afri ca impiden casi constantemente la visualidad de una á otra orilla. Hacia el principio del otoño, cuando la temperatura más baja disminuye la evaporación y las primeras lluvias despejan la atmósfera, es la estación más propicia para hacerse mutuamente visibles, por cortos intervalos, los puntos elevados de ambas costas; y era preciso aprovecharla antes que la aproximación del invierno cubriera de nieves las altísimas estaciones españolas.

---

d'Espagne et de France, sous la direction de M. le Général Ibañez pour l'Espagne et M. le Colonel Perrier pour la France.—Paris.—Imprimerie Nationale.—MDCCCLXXXVI.

A la buena amistad de D. Rafael Pardo de Figueroa y Serna, del Hábito de Santiago, debo el conocimiento de la JONCTION, y al facilitármela, me indicó especialmente sus páginas 86 y 87 como sospechosas de error.

(*) Creo que en la triangulación hecha por los ingleses en la India midieron varias visuales comprendidas entre 160 y 240 kilómetros y aun una que llegó á 340. Pero es de suponer que no tuvieran la condición de haberse estacionado en los dos extremos de cada visual, siendo uno de ellos el pico del Himalaya.

La de Mulhacen es el punto más elevado de Sierra Nevada y de la Europa occidental y tiene 3481 metros sobre el nivel del mar; la de Tetica 2080, y es el punto culminante de la Sierra de los Filabres, en la provincia de Almería.

En los meses de Agosto, Septiembre y Octubre de 1878 se hizo una campaña preliminar en las cuatro estaciones con el único fin de apreciar la posibilidad de la observación, la cual quedó resuelta y aplazada para el otoño siguiente de 1879. En esta campaña primera se adquirió el convencimiento de que en los meses de Abril á Octubre rara vez son visibles las costas durante el día y solamente lo son antes ó después de lluvia, cuando el sol está próximo al horizonte. Los heliotropos casi nunca pudieron distinguirse.

La primera mitad del año 1879 se dedicó á experiencias y trabajos preparatorios, elección, compra y estudio de los instrumentos y aparatos que habían de emplearse, ensayos de señales artificiales, discusión de los métodos de observación y aprendizaje del personal secundario.

Respecto á instrumentos se adoptó el círculo azimutal de Brunner para la medición de los ángulos horizontales, provisto de cuatro microscopios para las lecturas del limbo, y de retículo con hilo movible en el anteojo; el círculo meridiano del mismo autor para las observaciones astronómicas de paso, heliotropos con espejos planos plateados de caras paralelas y 30 centímetros de lado; colimadores ópticos con luz de petróleo y lentes de 20 centímetros de diámetro para señales de noche entre las estaciones más próximas, y finalmente, proyectores de luz eléctrica, con motores de vapor de tres caballos de fuerza, para dirigir luz durante la noche á las estaciones más distantes.

Algunos centenares de soldados y obreros se ocuparon durante dos meses en abrir caminos carreteros hacia los poco accesibles vértices del cuadrilátero, teniendo que hacer uso de la mina y quedando problemático en varios trozos el paso de los vehículos. También se construyeron dos casetas de mampostería en la estación de Tetica y siete en la de Mulhacen para alojamiento del personal y protección de máquinas é instrumentos.

Antes de finalizar el mes de Julio de 1879, empezó el transporte de instrumentos y maquinaria, y á fin de Agosto estaban instaladas las cuatro estaciones y dispuestas á funcionar. Sobre el pico del Mulhacen, comunmente visitado nada más que por las águilas y cabras monteses, iba á verificarse uno de los prodigios de la ciencia y de la industria modernas, la producción de focos poderosos de luz eléctrica, con bastante intensidad, para ser vistos á 270 kilómetros. Sobre aquella helada cima iban á vivir durante dos meses geodestas, ayudantes, maquinistas, soldados, operarios, cuarenta personas próximamente, provistas de instrumentos de precisión, de aparatos, de máquinas y produciendo todo el ruido de la vida industrial, incluso el silbido del vapor, uno de los rasgos característicos de nuestra moderna civilización.

La mayor parte de la impedimenta fué transportada sobre mulos á lo alto de la estación, no sin pasar muchos trabajos y peligros; pero las voluminosas piezas de maquinaria exigieron cuatro carretas para su transporte y ocasionaron aflictivas vicisitudes. Escoltados estos vehículos por sesenta hombres, que con ayuda de largos cables los contenían y sujetaban en las pendientes rápidas de descenso, donde los bueyes hubieran sido arrollados, y les ayudaban en las de ascenso, tardaron diez y siete días en recorrer la corta distancia (seis leguas), que hay de Granada á lo alto del Mulhacen, con mil peripecias y peligros que hicieron varias veces dudoso el éxito.

En la estación de Tetica también hubo que vencer grandes obstáculos para la subida de igual impedimenta, por caminos improvisados que más bien merecían el nombre de despeñaderos; y fué necesario construir en la cumbre nuevos abrigos, á causa de la extremada violencia con que soplan los vientos casi de continuo en aquellas altas regiones.

En todas las estaciones se procedió inmediatamente á montar las dinamos, los reflectores, el colimador óptico y la máquina de vapor para poder enviar desde cada una dos focos de luz eléctrica á las dos estaciones más lejanas y uno de luz de petróleo, por el colimador respectivo, á la estación más próxima. Al mismo tiempo se montaba con el necesario abrigo un observatorio en el pilar central, se instalaban estaciones meteorológicas y se hacían senderos para comunicar entre sí las edificaciones de una misma estación.

En Mulhacen, los trabajadores montañeses, mal alimentados y faltos de ropas de abrigo, no podían soportar la baja temperatura de aquellas alturas; transidos de frío y sin otra bebida que la nieve derretida artificialmente, tuvieron que dejar el trabajo á bandadas, huyendo de las fiebres y disentería que sobrevinieron. Por falta de operarios hubo que recurrir á los alcaldes de las aldeas circunvecinas é imponer oficialmente este servicio á los trabajadores como una carga municipal.

Desde fines de Agosto, que quedaron las cuatro estaciones dispuestas á funcionar, hasta principios de Octubre, no pudo completarse la observación de cuarenta vueltas de horizonte para cada estación, que era el plan propuesto. Ni un solo día se vieron los heliotropos, y de las pocas noches en que se distinguieron las luces, la mitad fué de una manera incompleta, ya porque dejaba de verse alguna de ellas, ya porque la visión duraba con frecuencia corto intervalo de tiempo.

Para dar una idea de las ansiedades y trabajos que sufrieron los geodestas durante este período, traduciré algunos párrafos del *Diario de Mulhacen*, que dice así:

"Transcurría el tiempo, y la niebla, nieve y granizo ocultaban sin cesar el horizonte: la inquietud y el desaliento empezaban á dominar, porque si bien habíamos logrado ver, con ayuda de anteojo, la luz de Tetica, no aparecían las de M'Sabiha y Filhaoussen.

„Pasaron así días, y en la noche del 9 de Septiembre, estando el anteojo dirigido como de costumbre hacia Filhaoussen, vimos por fin su luz bella, roja y brillante. Esta fué una compensación al desencanto de tantos días perdidos y de tantas vigilias é inquietudes como llevábamos soportadas desde el principio de la operación. Aquel punto luminoso no se vió más que durante cincuenta minutos, y si bien es cierto que la observación adelantó poca cosa en esta noche, por no verse la luz de M'Sabiha, la esperanza y el aliento renacieron no obstante, con la seguridad adquirida de que las direcciones recíprocas entre los dos vértices eran exactas.

„En la noche del 10 se vieron ya las tres luces y la observación pudo hacerse y proseguirse con felicidad, en las del 11, 12 y 13; pero ya en los dos días siguientes ocurrieron nuevas y espesas nieblas con fuerte granizada. Pasajero este mal tiempo, la observación se reanudó en la noche del 16, aunque la luz de Tetica no se vió hasta el 17.

„La temperatura había bajado tanto y el viento soplaba con tal fuerza, que, á pesar de los muros construídos para proteger los reflectores, y de que los geodestas y sus ayudantes estaban abrigados lo mejor posible, el servicio de señales se hacía con gran dificultad, y era tan intenso el frío en la tienda de observación, que se necesitaban gruesos guantes forrados para manejar el instrumento, pues sin esta precaución, el contacto del metal producía el efecto de una quemadura. La observación era además dificultosa á causa de la congelación del aceite empleado para engrasar el eje del instrumento, y hasta tal punto, que limbo y eje parecían formar una sola pieza, y eran necesarios potentes esfuerzos para conseguir el giro del uno sobre el otro.

„El viento aumentó de violencia, y hacia el fin de la noche empezó á nevar con abundancia; bien pronto se vió la estación cubierta de una capa de nieve de medio metro de espesor; el cielo estaba teñido de color gris y la nieve que caía sin cesar velaba por completo el horizonte.

„El despertar de esta noche fue horrible: las predicciones de los montañeses, más peritos que nosotros en las condiciones meteorológicas locales, parecía en esta amanecida que debían realizarse. Habían afirmado que después de la primera quincena de Septiembre era de temer que la nieve viniera súbitamente á reclamar el dominio absoluto de estas regiones, y que su aparición, si bien podía ser pasajera, también entraba en lo posible que fuera permanente y definitiva.

„Todo el personal, encerrado en sus alojamientos, contemplaba tristemente los copos de nieve que el viento arrebataba en torbellinos; cuando de repente, á las once de la mañana, se oyó un ruido sordo y próximo: todos comprendimos que había caído un rayo en el punto más culminante de la estación, el cual sin duda habría destrozado la maquinaria. ¡Tantos sacrificios hechos se iban á perder por completo! El capitán Cebrián se precipitó hacia el local de la máquina, seguido del ayudante Martínez. Cuando llegaron, aun ardían las cubiertas de los cables conductores; los hilos metálicos se habían fundido y los cables se rompían y caían al suelo. No se podía aún calcular la importancia del daño; era preciso ante todo confortar el espíritu abatido de soldados y trabajadores; y esto fué lo que hicieron en seguida el coronel Barraquer el comandante Borrés y el capitán Cebrián. El terror se había apoderado de aquellos auxiliares, pues todos, más ó menos, habían sentido los efectos de la descarga eléctrica, y especialmente un cabo y un soldado que perdieron el conocimiento y se quejaban luego de un malestar horrible. Los trabajadores se desesperaban al imaginar que tenían cortada la retirada y temían que nuevas chispas eléctricas vinieran á aumentar las angustias de la situación.

„Al fin se calmó la terrible tormenta y empezó á renacer la confianza; pero en vano se esperó la llegada diaria de víveres y correo: el aspecto del cielo durante el día, no dejaba la menor esperanza para el siguiente: esto no obstante aclaró algo el 19 y los espíritus se reanimaron al ver llegar los mulos cargados de provisiones y precedidos de grueso número de trabajadores que enviaba el alcalde de Capileira.„

Basta con lo que queda extractado de la *Memoria* para formar una idea de las angustias y trabajos que abrumaron á los geodestas en la inhospitalaria cumbre del Mulhacen, y poco menos ocurrió en la de Tetica. Si el temporal continúa y la nieve se posesiona definitivamente de aquellas estaciones, no solamente se habría perdido la observación, sino también alguna ó quizás todas las vidas de aquellos soldados de la ciencia, pues la retirada hubiera sido probablemente desastrosa.

En los otros observatorios, aunque en menor escala, no dejaron de pasar sus moradores ansiedades y molestias; pero afortunadamente, los últimos días de Septiembre fueron buenos para todos, y concluída la misión de los geodestas á principios de Octubre, emprendieron éstos la faena laboriosa del descenso, quedando en Tetica y M'Sabiha los astrónomos encargados de observar diferencia en longitud, latitudes y azimutes, á fin de obtener también el enlace astronómico de Argelia con España, ya que el geodésico estaba asegurado con los ocho ángulos medidos del cuadrilátero de enlace. Tiempo era de abandonar á Mulhacen, pues la mansión en su cumbre solitaria y helada se hacía más difícil y peligrosa á medida que avanzaba el tiempo. La temperatura bajó con frecuencia á 12° bajo cero, la presión atmosférica nunca subió de 512 mm., el viento llegó á veces á una velocidad de 127 km. por hora y cada día aumentaba la probabilidad de que la nieve hiciera imposible la retirada.

CAPÍTULO II

DE ALGUNOS ERRORES TEÓRICOS QUE HE CREÍDO ENCONTRAR EN LA "MEMORIA"

La segunda parte de la *Jonction* trata exclusivamente de los cálculos practicados para el enlace geodésico y consideraciones en que se apoyan.

Las observaciones que sirven de base á estos cálculos vienen á resumirse en la medición, desde los cuatro vértices del cuadrilátero, de los ocho ángulos formados por las proyecciones (sobre los planos horizontales determinados por los limbos de los respectivos instrumentos azimutales) de todas las visuales posibles entre dichos vértices.

Los cálculos comienzan por la *compensación del cuadrilátero* antes de pasar á la resolución definitiva de los triángulos. A este propósito dice la *Memoria* que *el teorema de Legendre, el cual sustituye al triángulo geodésico*, *medido sobre el esferoide, un triángulo esférico de iguales lados*, *situado sobre la esfera oculatriz en el centro de gravedad del triángulo considerado*, *es aún aplicable al cuadrilátero de enlace, á pesar de la longitud de sus lados.*

La sustitución á que se refiere la tesis anterior es muy cierta y de aplicación corriente en casi todas las operaciones geodésicas; pero no es debida al teorema de Legendre, sino más bien á Bessel, que el año de 1822 publicó en las *Astronomischen Nachrichten* fórmulas para la reducción de un triángulo geodésico á esférico con iguales lados.

El famoso y conocidísimo teorema de Legendre no interviene entre triángulo geodésico y esférico, sino entre triángulo esférico y plano, y dice así: "*todo triángulo esférico pequeño se puede calcular como plano de iguales lados, restando á cada ángulo el tercio del exceso esférico.*" Por tanto, su cita ni es pertinente, ni aplicable al caso de la reducción del triángulo geodésico.

Pudiera atribuirse á un *lapsus cálami* esta cita extemporánea del teorema de Legendre, si no fuera porque en el párrafo siguiente de la *Memoria* se insiste de nuevo en aplicarlo á la reducción de los ángulos del triángulo esferóidico á ángulos del triángulo esférico de iguales lados, y hasta se formula su procedimiento; por donde resulta evidente que no se trata de errata ni de accidental equivocación, sino de un error de principio, cuya aclaración procede. El segundo párrafo á que me refiero, dice así:

Hemos calculado el exceso esférico de los triángulos del cuadrilátero por medio de la fórmula

$$3\varepsilon = \frac{a\,b \sin C}{2\,\rho_m\,N_m \sin 1''}\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,\rho_m\,N_m}\right)$$

siendo ε *la corrección común que es necesario aplicar á los ángulos del triángulo* esferóidico *para reducirlos á ángulos del triángulo* esférico *de iguales lados.*

Es por tanto evidente, que en realidad de lo que se trata es de aplicar el tercio del exceso esférico á cada ángulo del triángulo esferóidico ó geodésico, para obtener el correspondiente ángulo del equivalente triángulo esférico, autorizando este procedimiento con el teorema de Legendre, quien jamás dijo, ni pudo decir tal absurdo. Y como también es inconcebible que lo imaginen los sabios directores del *Enlace geodésico*, preciso es conjeturar que en la significación de las palabras empleadas haya ciertas diferencias de apreciación que nublen la inteligencia del texto, por lo cual encuentro oportuno explanar aquí algunas de las ideas fundamentales de la geodesia en la parte que se refiere á la triangulación sobre el globo terráqueo, considerado como un elipsoide de rotación.

El geodesta imagina un elipsoide de rotación, limitado generalmente por la superficie del nivel medio del mar en sus movimientos de flujo y reflujo. A este elipsoide hipotético refiere, por proyección horizontal, todos los puntos fundamentales (estaciones) que elige sobre la superficie real para ser ligados entre sí por visuales, cuyas direcciones relativas mide. Estos puntos resultantes en la superficie del elipsoide hipotético se imaginan, á su vez, unidos entre sí por líneas llamadas *geodésicas*, esto es, por las *líneas más cortas* que sobre tal superficie pueden trazarse entre dichos puntos, y de aquí resulta lo que se llama *red* ó *cadena de triángulos*, cuyos elementos todos incumbe al geodesta calcular, como medio para obtener la medición de un territorio, la determinación de coordinadas geográficas de los vértices, la extensión de un arco de meridiano ó paralelo, etc., etc.

Los triángulos así formados en la superficie del elipsoide hipotético son los llamados *esferóidicos* ó *geodésicos*. Para facilitar el cálculo de un triángulo de esta clase se suele sustituir por otro esférico de iguales lados, que imaginamos sobre una esfera osculatriz en el centro de gravedad del triángulo, y en esta sustitución suele suponerse que los ángulos de ambos triángulos son también iguales, lo cual nunca es cierto en rigor; pero se acepta, sin error notable, siempre que los lados no pasan de 64 kilómetros, y por tanto en casi todos los trabajos geodésicos.

Finalmente, para facilitar aún más el cálculo, se acostumbra pasar del triángulo *esférico* á otro *plano* de iguales lados, descontando un tercio del exceso esférico á cada uno de los ángulos de aquél, con arreglo al teorema de Legendre; sustitución que tampoco es exacta, pero puede considerarse como bastante aproximada para la marcha ordinaria de los trabajos geodésicos, con la misma limitación de longitud de lados que para el caso anterior queda indicada.

Sentados estos principios fundamentales se comprenderá que no solamente es imposible la reducción del triángulo *geodésico* ó *esferóidico* á *esférico* por medio del teorema de Legendre, sino también incomprensible lo que quieran decir los dos *párrafos* que dejo transcritos de la *Jonction*. Empero antes de abandonarlos para pasar á analizar el siguiente, haré notar que, por sí solas, las palabras *triángulo geodésico medido* del primer párrafo, y su repetición *triángulo esferóidico medido* del segundo, también son difíciles de entender. No hay todavía ningún triángulo medido, solamente ángulos, y si con ellas se quiso decir que están medidos los ángulos del triángulo esferóidico ó geodésico sería otro error, porque los ángulos que se miden en los vértices, por medio del teodolito ó del círculo azimutal, no son los del triángulo geodésico, sino los llamados *ángulos horizontales,* esencialmente distintos de aquellos.

El párrafo que sigue á los dos mencionados, dice así:

M. Andræ ha dado una expresión elegante de los términos despreciados en la reducción de los ángulos esferóidicos á ángulos esféricos.

Suponiendo

$$\alpha = \frac{1}{\rho_A \; N_A}, \qquad \beta = \frac{1}{\rho_B \; N_B}, \qquad \gamma = \frac{1}{\rho_C \; N_C},$$

$$\mu = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3},$$

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}, \qquad \sigma = \frac{a\, b \sin C}{2 \sin 1''}, \quad (*)$$

y llamando d A, d B, d C, á la suma de los términos despreciados en la reducción de los ángulos A, B, C, se tiene

$$d\,A = \frac{1}{12}\,\sigma\,(\alpha - \mu) + \frac{\sigma\,\mu^2}{60}\,(m^2 - a^2) + \ldots.$$

$$d\,B = \frac{1}{12}\,\sigma\,(\beta - \mu) + \frac{\sigma\,\mu^2}{60}\,(m^2 - b^2) + \ldots.$$

$$d\,C = \frac{1}{12}\,\sigma\,(\gamma - \mu) + \frac{\sigma\,\mu^2}{60}\,(m^2 - c^2) + \ldots.$$

Supongo que el M. Andrœ de que se trata será el sabio Director de la *Danske Gradmaaling* y autor de porción de trabajos teóricos, elegantes y profundos sobre geodesia superior, publicados en la presente mitad del siglo. Siendo así, no puedo entender que atribuya á estas fórmulas la representación de los términos que (ordinariamente, en lados menores de 64 kilómetros) suelen despreciarse, al reducir los ángulos *esferóidicos* á ángulos *esféricos,* como dice la *Memoria,* sino los que suelen despreciarse en la reducción de ángulos *esferóidicos* á ángulos *planos*, por razón de los no llevados en cuenta al verificar los dos sucesivos pases de *esferóidicos* á *esféricos* y de éstos á *planos*.

(*) La *Jonction* no explica la notación de estas fórmulas. Yo entiendo que A, B, C, son los ángulos y a, b, c, los lados opuestos del triángulo, éstos expresados en metros; que ρ_A, ρ_B, ρ_C, son los radios de curvatura en el meridiano de los respectivos vértices, y N_A, N_B, N_C, los radios de curvatura de la sección perpendicular al meridiano, correspondientes á los mismos puntos. Las expresiones algebraicas de unos y otros radios se darán más adelante; α, β, γ, son, por consiguiente, las *medidas de curvatura* (Krümmungsmass que llamó Gauss) de los vértices A, B, C, y μ la *medida de curvatura* del centro de gravedad del triángulo, con la suficiente aproximación.

Sean A_g, B_g, C_g, los ángulos geodésicos ó esferóidicos; A_e, B_e, C_e, los esféricos; A_p, B_p, C_p, los planos, y las fórmulas siguientes son las ciertas, con la suficiente aproximación para el caso presente.

$$\left.\begin{aligned} A_g - A_e &= \frac{1}{12}\sigma(\alpha - \mu) + \dots \\ B_g - B_e &= \frac{1}{12}\sigma(\beta - \mu) + \dots \\ C_g - C_e &= \frac{1}{12}\sigma(\gamma - \mu) + \dots \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} A_e - A_p &= \varepsilon + \frac{\sigma\mu^2}{60}(m^2 - a^2) + \dots \\ B_e - B_p &= \varepsilon + \frac{\sigma\mu^2}{60}(m^2 - b^2) + \dots \\ C_e - C_p &= \varepsilon + \frac{\sigma\mu^2}{60}(m^2 - c^2) + \dots \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Ya queda dicho que del triángulo esferóidico se puede pasar al esférico de iguales lados, suponiendo que los ángulos son también respectivamente iguales, cuando el triángulo es pequeño. En el caso presente los triángulos son grandes, y es preciso ver, por las fórmulas (I), que contienen los principales términos desechados por la anterior hipótesis, si las diferencias entre unos y otros ángulos son ó no son despreciables.

También queda dicho que del triángulo esférico se puede pasar al plano de iguales lados por el teorema de Legendre, restando á los ángulos del esférico la corrección común ε; pero este teorema ya advierte que solamente se refiere á triángulos pequeños; y los términos principales de aquellos que suelen despreciarse para sentar el teorema, únicos que quizás puedan tener influjo digno de consideración en los triángulos hispano-argelinos, son los expresados por las fórmulas (II). Luego procede, cuando los triángulos son extraordinarios, como en el presente caso ocurre, calcular por dichas fórmulas si estos términos desatendidos son ó no son de importancia.

Las fórmulas (I) y (II), combinadas entre sí, dan por consiguiente las correcciones que tiene reservada la teoría para casos excepcionales, cuando se trata de pasar, en triángulos de grandes dimensiones, del triángulo *esferóidico* al *plano* y no del *esferóidico* al *esférico*, como equivocadamente, sin duda, dice la *Jonction*, atribuyéndolo al eminente geodesta M. Andrœ. La cual continúa con las siguientes palabras:

Hemos pensado que sería interesante darnos cuenta de la importancia de estas cantidades despreciadas; las hemos calculado para el mayor de los triángulos del cuadrilátero de enlace, para el triángulo Filhaoussen—M'Sabiha—Mulhacen, y resulta:

Filhaoussen..........	$d\,A = +\,0{,}''00060$
M'Sabiha.............	$d\,B = -\,0{,}00026$
Mulhacen.............	$d\,C = -\,0{,}00034$

Estas cantidades son insignificantes y no alteran la cifra de los centímetros en la magnitud de los lados; por tanto, las hemos desechado por completo. Empero, como afectan la cuarta cifra decimal de los ángulos, nos hemos limitado á la tercera decimal del segundo para todos los cálculos relativos á los ángulos.

Es decir, que por ser los ángulos esferóidicos próximamente iguales á los ángulos del triángulo plano más un tercio del exceso esférico (tan próximamente iguales que los errores no llegan á un milésimo de segundo), creen los autores de la *Jonction géodésique* que pueden tratar los ángulos observados lisa y llanamente en la misma forma que se emplea para triángulos pequeños, contentándose con aplicarles, como única corrección, el tercio del exceso esférico.

¿Dónde está la congruencia de tal deducción? ¿Es acaso el ángulo *esferóidico* el observado ó el ángulo *horizontal?* ¿Se ha probado, por ventura, que en estos triángulos gigantescos es lícito suponer equivalentes ambos ángulos, *esferóidico* y *horizontal*, como lícito es suponerlo cuando se trata de triángulos pequeños?

Por otra parte, si bien la *Jonction* ha demostrado que las correcciones *d A*, *d B*, *d C*, en el triángulo Filhaoussen—M'Sabiha—Mulhacen no afectan el milésimo de segundo, es arbitrario é ilógico deducir que lo mismo ocurrirá con los otros triángulos del cuadrilátero de unión por ser más pequeños, pues constando la corrección de cada ángulo de dos términos, bien puede ocurrir que en triángulo mayor sean éstos términos mayores en valor absoluto, pero se compensen en parte por tener signo contrario, y en triángulo más pequeño, aun siendo los términos individualmente menores, la suma sea más importante por tener ambos el mismo signo.

Entre los distintos errores teóricos que dejo ligeramente comentados, debo distinguir dos clases: primera, la de aquellos que solamente ofenden al rigor matemático ó á la debida inteligencia del texto, sin trascender ulteriormente á los resultados, y segunda, la de aquellos en que se apoya el cálculo numérico subsiguiente, aceptándolos como verdades inconcusas, y alteran por tanto, de una manera sensible, la exactitud de los resultados. De estos últimos trataré exclusivamente en el capítulo que sigue, para aquilatar sus trascendencias numéricas, mientras que, respecto á los primeros, creo suficientes las indicaciones hechas y precisas para la mejor inteligencia de la teoría general.

Hace más de medio siglo que Biot y Arago, como ya queda dicho, unieron geodésicamente la isla Ibiza á la Península por medio de un gran triángulo Campvey—Desierto—Montgó, cuyo lado Campvey—Desierto resultó de 82555,44 toesas, que vienen á ser unos 161 kilómetros. Todos los tratados posteriores de Geodesia y de Hidrografía nos hablan de este notable acontecimiento, nuevo en su especie, y aun nos dicen que la diferencia entre calcular este enorme triángulo por los métodos aproximados que se usan generalmente en todas las triangulaciones geodésicas, y calcularlo por las fórmulas más exactas, no alcanza para los lados más que á una fracción de *metro*. Ahora bien, siendo como son los triángulos del *Enlace geodésico de Argelia con España* bastante mayores que aquél (y alguno de casi doble superficie) se hace difícil creer que la diferencia para éstos entre el cálculo aproximado, usual y corriente, y el procedimiento más exacto no alcance á la milésima de segundo en el ángulo, ni al *centímetro* en el lado, como en la *Jonction* se asegura. Creo que los mismos autores de ella, más versados que yo en este antecedente y en todo linaje de conocimientos científicos, debieron quedar muy sorprendidos de tan maravilloso resultado.

CAPÍTULO III

DE LOS ERRORES TEÓRICOS QUE TIENEN ALGUNA TRASCENDENCIA EN LOS RESULTADOS

Ya indiqué en el anterior capítulo que, por el solo hecho de no haber encontrado, respecto al mayor triángulo, correcciones para sus ángulos que afectaran á la tercera cifra decimal del segundo, no era lógico ni matemático deducir que lo mismo ocurrirá en los otros tres triángulos del cuadrilátero de enlace, á causa de ser menores que aquél. Y aunque dejé apuntada la razón teórica que para ello había, procede ahora, para mayor evidencia, ensayar en los otros la aplicación de las mismas fórmulas que dejo copiadas del texto, atribuídas por este á M. Andrœ; y al efecto comienzo por el triángulo Filhaoussen—Tetica—Mulhacen, según el cálculo numérico que va á continuación:

Filhaoussen.	*A*	$\log \alpha = 6{,}3916071 - 20$
Tetica.	*B*	$\log \beta = 6{,}3913865 - 20$
Mulhacen.	*C*	$\log \gamma = 6{,}3914063 - 20$

$\alpha = 2463809 : 10^{20}$	$a^2 = 6860 \times 10^6$
$\beta = 2462558 : 10^{20}$	$b^2 = 72861 \times 10^6$
$\gamma = 2462670 : 10^{20}$	$c^2 = 66261 \times 10^6$
$\mu = 2463012 : 10^{20}$	$m^2 = 48661 \times 10^6$
$\alpha - \mu = +797 : 10^{20}$	$m^2 - a^2 = +41801 \times 10^6$
$\beta - \mu = -454 : 10^{20}$	$m^2 - b^2 = -24200 \times 10^6$
$\gamma - \mu = -342 : 10^{20}$	$m^2 - c^2 = -17600 \times 10^6$

$\log a = 4{,}91817$ $\log b = 5{,}43125$ $\log \sin C = 9{,}97939 - 10$ $C^{to} \log 24 = 8{,}61979 - 10$ $C^{to} \log \sin 1'' = 5{,}31443$ $\log \frac{1}{12}\sigma = 14{,}26303$	$\log \frac{1}{12}\sigma = 14{,}26303$ $\log \mu^2 = 2{,}78293 - 30$ $C^{to} \log 5 = 9{,}30103 - 10$ $\log \frac{\sigma\mu^2}{60} = 6{,}34699 - 20$
$\log \frac{1}{12}\sigma = 14{,}26303$ $\log (\alpha - \mu) = 2{,}90146 - 20$ $7{,}16449 - 10$ $A_g - A_e = +0'',00146$	$\log \frac{\sigma\mu^2}{60} = 6{,}34699 - 20$ $\log (m^2 - a^2) = 10{,}62118$ $6{,}96817 - 10$ $A_e - A_p = +\ 0'',00093 + \varepsilon_1$
$\log (\beta - \mu) = 2{,}65706_n - 20$ $\log \frac{1}{12}\sigma(\beta - \mu) = 6{,}92009_n - 10$ $B_g - B_e = -\ 0'',00083$	$\log (m^2 - b^2) = 10{,}38382_n$ $\log \frac{\sigma\mu^2}{60}(m^2 - b^2) = 6{,}[illegible]_n - 10$ $B_e - B_p = -\ 0'',00054 + \varepsilon_1$
$\log (\gamma - \mu) = 2{,}53403_n - 20$ $\log \frac{1}{12}\sigma(\gamma - \mu) = 6{,}79706_n - 10$ $C_g - C_e = -\ 0'',00063$	$\log (m^2 - c^2) = 10{,}24551_n$ $\log \frac{\sigma\mu^2}{60}(m^2 - c^2) = 6{,}59250_n - 10$ $C_e - C_p = -\ 0'',00039 + \varepsilon_1$

El cálculo anterior corrobora la afirmación que hice al comenzar el presente capítulo. En efecto, á pesar de referirse á un triángulo menor que el escogido en la *Jonction*, las correcciones halladas,

$$d\,A = +\ 0'',00146 + 0'',00093 = +\ 0'',00239$$
$$d\,B = -\ 0{,}00083 - 0{,}00054 = -\ 0{,}00137$$
$$d\,C = -\ 0{,}00063 - 0{,}00039 = -\ 0{,}00102,$$

son cuádruplas de las deducidas para aquél, y afectan ya la 3.ª cifra decimal del segundo en los ángulos y el centímetro en los lados.

Es muy cierto que aun así cuadruplicadas estas correcciones, su influencia es todavía muy pequeña en los cálculos subsiguientes; pero para proceder en buena lógica hay que escoger entre los dos caminos que se presentan: ó adoptar estas correcciones y aplicarlas á los ángulos respectivos, ó despreciarlas, renunciando también á una aproximación ya extremada é inútil, y limitando ésta al centésimo de segundo en el ángulo, al decímetro en el lado y á 7 cifras decimales para los logaritmos en vez de las 8 que la *Memoria* emplea. Yo, sin titubear, optaría por el primer camino, ya que la grandeza del asunto, lo excepcional de su ocurrencia y la suma de dificultades vencidas para el logro de tan interesante observación, merecen todo el lujo de perfiles y adornos que el cálculo más esmerado le pueda aportar; no son óbice para ello ni los *desvíos de la vertical,* distintos en cada vértice y que tanto afectan á todas las observaciones astronómicas y geodésicas, por ser aquella línea nuestra única guía en el espacio, ni menos aún los recientes descubrimientos de la instabilidad de dichos desvíos, pues para la primera causa algo puede ahondar ya la ciencia actualmente, y para el estudio de ambas, quizás los venideros (aunque hoy no lo entendamos) encuentren orígenes de luz en nuestros actuales esfuerzos; que nunca la flojedad y el desaliento fueron antorchas del adelanto científico.

Procedo, pues, al cálculo de las mismas correcciones para los dos triángulos restantes del cuadrilátero, y aun para el primero; á fin de distinguir las partes en que se dividen los valores de dA, dB, dC, que da la *Jonction* y que encuentro exactos. Aplicando las mismas fórmulas al triángulo M'Sabiha—Tetica—Mulhacen, obtengo

M'Sabiha....	$A_g - A_e = +0'',00082$	$A_e - A_p = +0'',00065 + \varepsilon_3$
Tetica.......	$B_g - B_e = -0,00049$	$B_e - B_p = -0,00052 + \varepsilon_3$
Mulhacen...	$C_g - C_e = -0,00033$	$C_e - C_p = -0,00013 + \varepsilon_3$

$$dA = +0'',00147$$
$$dB = -0,00101$$
$$dC = -0,00046$$

y del mismo modo para el triángulo Filhaoussen—M'Sabiha—Mulhacen,

Filhaoussen..	$A_g - A_e = +0'',00120$	$A_e - A_p = -0'',00060 + \varepsilon_2$
M'Sabiha....	$B_g - B_e = +0,00034$	$B_e - B_p = -0,00060 + \varepsilon_2$
Mulhacen....	$C_g - C_e = -0,00154$	$C_e - C_p = +0,00120 + \varepsilon_2$

$$dA = +0'',00060$$
$$dB = -0,00026$$
$$dC = -0,00034$$

y para el triángulo Filhaoussen—M'Sabiha—Tetica,

Filhaoussen..	$A_g - A_e = +0'',00109$	$A_e - A_p = -0'',00020 + \varepsilon_4$
M'Sabiha.....	$B_g - B_e = +0,00036$	$B_e - B_p = -0,00058 + \varepsilon_4$
Tetica.......	$C_g - C_e = -0,00145$	$C_e - C_p = +0,00078 + \varepsilon_4$

$$dA = +0'',00089$$
$$dB = -0,00022$$
$$dC = -0,00067.$$

Resulta, por lo que antecede, que de los 4 triángulos del cuadrilátero de enlace, el mayor de ellos (elegido con este motivo por los autores de la *Memoria*), es el que menores correcciones necesita (exceso esférico aparte) para el pase de ángulos esferóidicos á ángulos planos, y el único en que no resulta afectada la tercera cifra decimal del segundo por el abandono de dichas correcciones.

Voy á pasar ahora á la consideración de otro error de más importancia (y que también dejé indicado en el capítulo anterior), el cual consiste en confundir el ángulo observado desde una estación por medio del círculo azimutal, con el ángulo esferóidico formado por las dos líneas geodésicas, que son lados del triángulo esferóidico ó geodésico considerado.

Cuando desde una estación *A* se dirigen visuales á dos puntos *B* y *C*, mediante el instrumento previamente nivelado, lo que se mide es el ángulo diedro formado por los dos planos que pasan respectivamente por los puntos *B* y *C* y se intersecan en la vertical del observador (*). Las comunes secciones de ambos planos con el horizonte sensible forman un ángulo plano que es medida del diedro indicado (medida que revela la graduación del limbo horizontal), y por todo ello es y se designa el ángulo observado con el nombre de *ángulo horizontal.*

Los dos planos susodichos ocasionan en el elipsoide hipotético otras tantas secciones (llamadas *secciones verticales*), que generalmente son elipses, con lo que resultan los puntos *B* y *C* unidos al *A* por dos arcos elípticos, los cuales no son ni pueden ser en general *líneas geodésicas,* ni por tanto lados del triángulo geodésico ó esferóidico que se trata de medir.

El ángulo que el meridiano de *A* forma con la *sección vertical* que pasa por *B* se llama *azimut astronómico;* y el ángulo que el mismo meridiano forma con la línea geodésica *A B* se llama *azimut geodésico.* Hay fórmulas

(*) Se supone, por ahora, que los puntos considerados yacen sobre la superficie del elipsoide hipotético.

adecuadas para el cálculo de las pequeñas diferencias entre uno y otro azimut, y para pasar, por consiguiente, del *astronómico,* único que puede determinar la observación directa, al *geodésico*, que actualmente es el necesario para el cálculo de la triangulación esferóidica.

Entre A y B hay dos *secciones verticales:* una causada por el plano que pasa por la vertical de A y contiene al punto B, y la otra por el plano que pasa por la vertical de B y contiene al punto A. Ambas son elipses en dos planos distintos y no tienen de común entre sí más que la cuerda $A\ B$; pero sus respectivos arcos $A\ B$ sobre la superficie del elipsoide son distintos entre sí, y aun puede calcularse su máximo desvío por fórmulas *ad hoc* que tiene la Geodesia, así como también las tiene para la determinación del ángulo diedro comprendido entre ambas *secciones verticales.*

Finalmente, el *ángulo horizontal* es la diferencia entre dos *azimutes astronómicos*, así como el *ángulo esferóidico ó geodésico* es la diferencia entre dos *azimutes geodésicos.*

Si A_g, B_g, C_g, son los ángulos de un triángulo geodésico y A_H, B_H, C_H los ángulos horizontales correspondientes, las fórmulas que siguen dan, con suficiente aproximación para nuestro caso, la diferencia entre unos y otros ángulos, expresada en segundos. (*)

$$A_g - A_H = \tau \cos^2 \beta_1 \,(c^2 \sin 2\,\omega_{1.2} - b^2 \sin 2\,\omega_{1.3})$$
$$B_g - B_H = \tau \cos^2 \beta_2 \,(a^2 \sin 2\,\omega_{2.3} - c^2 \sin 2\,\omega_{2.1})$$
$$C_g - C_H = \tau \cos^2 \beta_3 \,(b^2 \sin 2\,\omega_{3.1} - a^2 \sin 2\,\omega_{3.2}).$$

En estas fórmulas $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, son las latitudes *reduci-*

(*) Para la deducción de estas fórmulas y de otras que emplearé más adelante, véase *Die mathematischen Theorieen der Höheren Geodäsie*, von Dr. F. R. Helmert; Leipzig, 1880.

das de los vértices A, B, C, obtenidas por la expresión siguiente:

$$\log \text{tang (latitud reducida)} = \log \text{tang (latitud geográfica)} + 9{,}99854582 - 10,$$

a, b, c, son los lados del triángulo esferóidico, expresados en metros, $\omega_{1,2}$ el azimut astronómico desde A hacia B, contado de 0° á 360° y del Sur al Oeste, $\omega_{1,3}$ el azimut análogo desde A hacia C, etc., etc.

$$\tau = \frac{282077}{10^{17}}, \qquad \log \tau = 8{,}4503677 - 20,$$

según los valores del elipsoide de Bessel.

Para lados de 23 kilómetros, el máximo valor que puede alcanzar cualquiera de los términos de estas fórmulas en nuestras latitudes es un milésimo de segundo, y no puede llegar al centésimo ni aun con lados de 70 kilómetros; pero en la unión hispano argelina, cuyos triángulos tienen lados de 270 kilómetros, ya no debe suponerse el *ángulo horizontal* observado equivalente al *esferóidico*. Procede en este caso calcular las diferencias por las fórmulas dadas y aplicarlas como corrección á las observaciones, para traerlas á que realmente representen los ángulos del triángulo *geodésico*, y poder pasar después de éste al *esférico*, y finalmente al *plano*, en el cual se verifica el cálculo numérico.

Veamos ahora la aplicación de las fórmulas al triángulo Filhaoussen—M'Sabiha—Mulhacen, cuyos vértices distinguiré (por el orden en que están escritos) con las letras A, B, C, ó con los números 1, 2, 3.

$2\omega_{1.2} = 92^\circ\ 50'$	$2\omega_{1.3} = 295^\circ\ 22'\ 40''$
$\log\ c^2 = 10{,}0438610$	$\log\ b^2 = 10{,}8624924$
$\log\ \sin 2\omega_{1.2} = 9{,}9994688-10$	$\log\ \sin 2\omega_{1.3} = 9{,}9559289-10$
$10{,}0433298$	$10{,}8184213$
$c^2 \sin 2\omega_{1.2} = +11049 \times 10^6$	$\log\ \tau = 8{,}4503677-20$
$-b^2 \sin 2\omega_{1.3} = +65830 \times 10^6$	$\log\ \cos^2 \beta' = 9{,}8275828-10$
Suma... $= +76879 \times 10^6$	$\log$ *suma*... $= 10{,}8858077$
$A_g - A_H = +0'',14580$	$\lg (A_g - A_H) = 9{,}1637582-10$
$2\omega_{3.2} = 251^\circ\ 26'$	$2\omega_{2.1} = 93^\circ\ 48'\ 24''$
$\log\ a^2 = 10{,}8622359$	$\log\ c^2 = 10{,}0438610$
$\log\ \sin 2\omega_{2.3} = 9{,}9767872_n-10$	$\log\ \sin 2\omega_{2.1} = 9{,}9993475-10$
$10{,}8390231_n$	$10{,}0432085$
$a^2 \sin 2\omega_{2.3} = -69028 \times 10^6$	$\log\ \tau = 8{,}4503677-20$
$-c^2 \sin 2\omega_{2.1} = -11046 \times 10^6$	$\log\ \cos^2 \beta_2 = 9{,}8206200-10$
Suma... $= -80074 \times 10^6$	$\log$ *suma*.. $= 10{,}9034915_n$
$B_g - B_H = -0'',14944$	$\lg (B_g - B_H) = 9{,}1744792_n-10$
$2\omega_{3.1} = 293^\circ\ 28'\ 12''$	$2\omega_{3.2} = 248^\circ\ 30'\ 40''$
$\log\ b^2 = 10{,}8624924$	$\log\ a^2 = 10{,}8622359$
$\log\ \sin 2\omega_{3.1} = 9{,}9624966_n-10$	$\log\ \sin 2\omega_{3.2} = 9{,}9687111_n-10$
$10{,}8249890_n$	$10{,}8309470_n$
$b^2 \sin 2\omega_{3.1} = -66833 \times 10^6$	$\log\ \tau = 8{,}4503677-20$
$-a^2 \sin 2\omega_{3.2} = +67756 \times 10^6$	$\log\ \cos.^2 \beta_3 = 9{,}8051240-10$
Suma... $= +\ 923 \times 10^6$	$\log$ *suma*.. $= 8{,}9652017$
$C_g - C_H = +0'',00166$	$\lg (C_g - C_H) = 7{,}2206934-10$

Por igual procedimiento se obtiene para el triángulo Filhaoussen—Tetica—Mulhacen,

Filhaoussen. . . . . . . $A_g - A_H = +0''06417$
Tetica. . . . . $B_g - B_H = +0,06508$
Mulhacen. . . . . $C_g - C_H = -0,12682$,

para el triángulo M'Sabiha—Tetica—Mulhacen,

M'Sabiha. . . . . $A_g - A_H = +0''03661$
Tetica. . . . . $B_g - B_H = +0,09542$
Mulhacen. . . . . $C_g - C_H = -0,12848$,

y finalmente, para el triángulo Filhaoussen—M'Sabiha—Tetica,

Filhaoussen. . . . . . . $A_g - A_H = +0''08163$
M'Sabiha. . . . . $B_g - B_H = -0,11283$
Tetica. . . . . $C_g - C_H = +0,03034$.

Estos resultados muestran y aquilatan los errores cometidos al suponer equivalentes el *ángulo horizontal* medido, formado por dos *secciones verticales,* y el ángulo esferóidico, formado por dos líneas geodésicas, que es el que ha de figurar en el cálculo de la triangulación y de las coordinadas geográficas.

CAPÍTULO IV

DE OTROS ERRORES, CUYO EXAMEN Y CORRECCIÓN HAN OMITIDO LOS AUTORES DE LA "JONCTION GÉODÉSIQUE"

En las triangulaciones geodésicas medimos siempre los ángulos por medio de visuales, y cada visual queda determinada por los dos puntos extremos. El punto origen de la visual se llama *estación,* y el otro extremo, adonde aquélla se dirige, se llama *objeto.*

Ya queda explicado cómo la *sección vertical,* determinada por una de estas visuales, contiene en su plano á la vertical de la *estación;* pero no contiene (salvo raro caso) á la vertical del *objeto.* El punto en que esta última corta á la superficie del elipsoide de rotación hipotético, esto es, el punto llamado *proyección horizontal del objeto,* es el *vértice geodésico* propiamente dicho, puesto que el geodesta refiere siempre sus triángulos á la superficie de este elipsoide, y sobre ella proyecta todas sus estaciones y traza idealmente la red de su triangulación.

Infiérese de aquí que cuando el *objeto* (como casi siempre sucede) no está precisamente en dicha superficie, una será la *sección vertical del objeto* y otra la *sección vertical del vértice geodésico (proyección horizontal del objeto),* lo que equivale á decir que *los azimutes astronómicos del objeto y de su proyección son diferentes entre sí.*

Pudieran distinguirse aplicando el nombre de ***azimut astronómico aparente*** al que determina la visual del *objeto*, y el de *azimut astronómico corregido* al que determina la visual hipotética que se dirigiera á *la proyección horizontal del objeto*.

Conocido el *azimut astronómico aparente*, si se quiere hallar el *corregido*, es necesario sumar á aquél un pequeño ángulo igual al formado por las respectivas *secciones verticales*, ángulo que se halla expresado en segundos por la fórmula

$$\omega^{(h)}_{1.2} - \omega_{1.2} = -\tau' H\left(\cos^2\varphi_1 \sin 2\,\omega^{(h)}_{1.2} + \frac{s}{2a_0}\sin 2\varphi_1 \sin \omega^{(h)}_{1.2}\right)$$

en donde $\omega_{1.2}$ es el *azimut astronómico corregido*, $\omega^{(h)}_{1.2}$ el *azimut astronómico aparente*, H la elevación del *objeto* sobre el elipsoide hipotético, expresada en metros, φ_1 la latitud geográfica de la *estación*, s la distancia sobre el elipsoide entre este punto y el *objeto*, a_0 el semieje ecuatorial, igual á 6377397,155 metros, y, finalmente, τ' un número cuyo logaritmo es 6,0331620—10.

Esta corrección, sin importancia para *objetos* poco distantes del nivel del mar, puede tenerla cuando se trata de otros elevados 2080 y 3481 metros, como sucede en el cuadrilátero que consideramos; sin embargo, los autores de la *Jonction géodésique* no han creído oportuno hacer mención de ella, ni corregir por este motivo sus propias observaciones. El cálculo que sigue evidencia que no son despreciables los valores de tal corrección para el presente caso; antes al contrario, sus magnitudes imponen el deber de que se les tome en consideración y se les lleve en cuenta, para aproximarse debidamente á la verdad y exactitud.

Aplicación de la última fórmula á la visual M'Sabiha—Mulhacen.

$H = 3481$, $\omega_{1.2}^{(h)} = 125°\ 42'\ 57''{,}5$, $\varphi_1 = 35°\ 39'\ 37''{,}05$

log $\cos^2 \varphi_1$	$= 9{,}8196338 - 10$	log s	$= 5{,}4311180$
log $\sin 2\omega_{1\cdot2}^{(h)}$	$= 9{,}9767837_n - 10$	C.^{to} log 2	$= 9{,}6989700 - 10$
log 1.^{er} término	$= 9{,}7964175_n - 10$	C.^{to} log a_0	$= 3{,}1953565 - 10$
		log $\sin 2\varphi_1$	$= 9{,}9764992 - 10$
1.^{er} término	$= -0{,}625774$	lg $\sin \omega_{1\cdot2}^{(h)}$	$= 9{,}9095151 - 10$
2.° término	$= +0{,}016273$	lg 2.° térm.°	$= 8{,}2114588 - 10$
Suma......	$= -0{,}609501$		
log *suma*.....	$= 9{,}7849744_n - 10$		
log H	$= 3{,}5417040$		
log $(-\tau')$	$= 6{,}0331620_n - 10$		
log $\left(\omega_{1\cdot2}^{(h)} - \omega_{1\cdot2}\right)$	$= 9{,}3598404 - 10$	$\omega_{1\cdot2}^{(h)} - \omega_{1\cdot2}$	$= +0'',22900$

Empleando la misma fórmula con las demás visuales, se obtiene:

para la visual	M'Sabiha-Tetica.....	$\omega_{1\cdot2}^{(h)} - \omega_{1\cdot2}$	$= +0'',14143$
» » »	M'Sabiha-Filhaoussen.	» — »	$= -0{,}08159$
» » »	Filhaoussen-Mulhacen.	» — »	$= +0{,}22374$
» » »	Filhaoussen-Tetica....	» — »	$= +0{,}06861$
» » »	Filhaoussen-M'Sabiha.	» — »	$= -0{,}04238$
» » »	Tetica-Mulhacen.....	» — »	$= -0{,}12279$
» » »	Tetica-Filhaoussen....	» — »	$= +0{,}03917$
» » »	Tetica-M'Sabiha......	» — »	$= +0{,}04018$
» » »	Mulhacen-Tetica.....	» — »	$= -0{,}07337$
» » »	Mulhacen-Filhaoussen.	» — »	$= +0{,}07307$
» » »	Mulhacen-M'Sabiha...	» — »	$= +0{,}03888$

El ángulo horizontal observado, que es la diferencia entre los *azimutes astronómicos aparentes* de dos *objetos,* estará afectado de un error igual á la diferencia entre los errores que ambos *azimutes* tienen, con motivo de la elevación de cada uno de los *objetos* sobre el nivel del mar. Por correspondencia pudiera llamarse *ángulo horizontal aparente* al observado y *ángulo horizontal corregido* al que se hubiera observado dirigiendo las visuales á los respectivos *vértices geodésicos*.

Para calcular las correcciones que corresponden á los *ángulos horizontales aparentes* distinguiré con las iniciales $M, T, S, F,$ los vértices Mulhacen, Tetica, M'Sabiha, Filhaoussen; con $v_H^{(h)}$ el *ángulo horizontal aparente;* con v_H el *ángulo horizontal corregido;* y las deduciré de las correcciones que se acaban de hallar para los *azimutes astronómicos aparentes*, en la forma que sigue:

para el ángulo $T\,M\,F = \omega_{MF} - \omega_{MT}$

$$v_H^{(h)} - v_H = +\ 0'',14644,$$

para el ángulo $T\,M\,S = \omega_{MS} - \omega_{MT}$

$$v_H^{(h)} - v_H = +\ 0'',11225,$$

para el ángulo $M\,T\,F = \omega_{TM} - \omega_{TF}$

$$v_H^{(h)} - v_H = -\ 0'',16196,$$

para el ángulo $M\,T\,S = \omega_{TM} - \omega_{TS}$

$$v_H^{(h)} - v_H = -\ 0'',16297,$$

para el ángulo $T\,S\,M = \omega_{ST} - \omega_{SM}$

$$v_H^{(h)} - v_H = -\ 0'',08757,$$

para el ángulo $T\,S\,F = \omega_{ST} - \omega_{SF}$

$$v_H^{(h)} - v_H = +\ 0'',22302,$$

para el ángulo $S\ F\ T = \omega_{FS} - \omega_{FT}$

$$v_H^{(h)} - v_H = -\ 0'',11099,$$

para el ángulo $S\ F\ M = \omega_{FS} - \omega_{FM}$

$$v_H^{(h)} - v_H = -\ 0'',26612,$$

para el ángulo $F\ M\ S = \omega_{MF} - \omega_{MS}$

$$v_H^{(h)} - v_H = +\ 0'',03419,$$

para el ángulo $F\ T\ S = \omega_{TF} - \omega_{TS}$

$$v_H^{(h)} - v_H = -\ 0'',00101,$$

para el ángulo $M\ S\ F = \omega_{SM} - \omega_{SF}$

$$v_H^{(h)} - v_H = +\ 0'',31059,$$

y finalmente, para el ángulo $T\ F\ M = \omega_{FT} - \omega_{FM}$

$$v_H^{(h)} - v_H = +\ 0'',15513,$$

CAPITULO V

RESUMEN DE CORRECCIONES PARA LOS ÁNGULOS OBSERVADOS

Los autores de la *Jonction* creyeron suficiente la resta de una tercera parte del exceso esférico para pasar del ángulo observado $v_H^{(h)}$ al ángulo plano v_p, é hicieron caso omiso de todas las correcciones que dejo explicadas y calculadas, y que englobo en el cuadro siguiente: por él se verá que dichas correcciones (que no llegaban á un milésimo de segundo, según reza la *Memoria),* alcanzan, si no voy fuera de camino, hasta 460 milésimos, cantidad muy digna de llevarse siempre en cuenta, y más especialmente en el caso actual.

Angulos.	$\overset{(h)}{v_H} - v_H$	$v_H - v_g$	$v_g - v_e$	$v_e - v_p$	Corrección total. $\overset{(h)}{v_H} - v_p$
T M F..........	+ 0",14644	+ 0",12682	— 0",00063	ε_1 — 0",00039	ε_1 + 0",2723
T M S..........	+ 0, 11225	+ 0, 12848	— 0, 00033	ε_3 — 0,00013	ε_3 + 0, 2403
M T F..........	— 0, 16196	— 0, 06508	— 0, 00083	ε_1 — 0,00054	ε_1 — 0, 2284
M T S..........	— 0, 16297	— 0, 09542	— 0, 00049	ε_3 — 0,00052	ε_3 — 0, 2594
T S M..........	— 0, 08757	— 0, 03661	+ 0, 00082	ε_3 + 0,00065	ε_3 — 0, 1227
T S F..........	+ 0, 22302	+ 0, 11283	+ 0, 00036	ε_4 — 0,00058	ε_4 + 0, 3356
S F T..........	— 0, 11099	— 0, 08163	+ 0, 00109	ε_4 — 0,00020	ε_4 — 0, 1917
S F M..........	— 0, 26612	— 0, 14580	+ 0, 00120	ε_2 — 0,00060	ε_2 — 0, 4113
F M S.	+ 0, 03419	— 0, 00166	— 0, 00154	ε_2 + 0,00120	ε_2 + 0, 0322
F T S..........	— 0, 00101	— 0, 03034	— 0, 00145	ε_4 + 0,00078	ε_4 — 0, 0320
M S F..........	+ 0, 31059	+ 0, 14944	+ 0, 00034	ε_2 — 0,00060	ε_2 + 0, 4598
T F M..........	— 0, 15513	— 0, 06417	+ 0, 00146	ε_1 + 0,00093	ε_1 — 0, 2169

He calculado los excesos esféricos de los cuatro triángulos por la misma fórmula que emplea la ***Memoria,***

$$3\varepsilon = \frac{a\,b \sin c}{2\,\rho_m N_m \sin 1''} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{24\,\rho_m N_m}\right), \qquad (*)$$

y obtenido los resultados siguientes:

Triángulo	Filhaoussen—Tetica—Mulhacen....	$3\varepsilon_1 = 54'',1653$
„	M'Sabiha—Mulhacen—Filhaoussen.	$3\varepsilon_2 = 70,7442$
„	M'Sabiha—Tetica—Mulhacen.......	$3\varepsilon_3 = 43,4973$
„	Filhaoussen—M'Sabiha—Tetica....	$3\varepsilon_4 = 60,0762$

En el cuadro que sigue se encuentra la aplicación (á las observaciones) de las correcciones totales halladas para cada ángulo y de las terceras partes de los excesos esféricos calculados, con el fin de deducir los ángulos planos corregidos de primera intención, pues aun falta la segunda corrección de los mismos que se obtendrá por medio de la compensación del cuadrilátero.

(*) Aunque la *Memoria* no explica la notación de esta fórmula, entiendo que a, b, c son los lados del triángulo, expresados en metros, C el ángulo plano comprendido entre los lados a y b; ρ_m el radio de curvatura del meridiano en el punto m, centro de gravedad del triángulo, y N_m el de una sección perpendicular al meridiano en el mismo punto, ó sea la *gran normal.* Estos dos radios, conocidos con el nombre de *radios principales de curvatura*, están determinados por las fórmulas

$$\rho_m = \frac{a_0 (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^{\frac{3}{2}}}$$

$$N_m = \frac{a_0}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_m)^{\frac{1}{2}}}$$

en donde a_0 es el semieje mayor, e la excentricidad y φ_m la latitud geográfica del punto m. El valor recíproco del producto de los dos radios principales, esto es, $\frac{1}{\rho_m N_m}$, representa lo que Gauss llamó *medida de curvatura.*

Angulos.	Observación.			Tercio del exceso esférico.	Corrección total.	Angulos planos.		
T M F............	72°	29′	11″,203	— 18″,0551	— 0″,2723	72°	28′	52″,8756
T M S............	50	00	25,934	— 14,4991	— 0,2403	50	00	11,1946
M T F............	89	39	16,210	— 18,0551	+ 0,2284	89	38	58,3833
M T S............	113	40	27,271	— 14,4991	+ 0,2594	113	40	13,0313
T S M............	16	19	52,219	— 14,4991	+ 0,1227	16	19	37,8426
T S F............	95	08	37,782	— 20,0254	— 0,3356	95	08	17,4210
S F T............	60	51	12,185	— 20,0254	+ 0,1917	60	50	52,3513
S F M............	78	43	39,198	— 23,5814	+ 0,4113	78	43	16,0279
F M S............	22	28	45,269	— 23,5814	— 0,0322	22	28	21,6554
F T S............	24	01	11,061	— 20,0254	+ 0,0320	24	00	51,0676
M S F............	78	48	45,563	— 23,5814	— 0,4598	78	48	21,5218
T F M............	17	52	27,013	— 18,0551	+ 0,2169	17	52	09,1748

CAPÍTULO VI

COMPENSACIÓN DEL CUADRILÁTERO DE ENLACE Y CÁLCULO DE LA TRIANGULACIÓN

Las ecuaciones de condición, de ángulo, son las tres siguientes:

Triángulo Filhaoussen — Tetica — Mulhacen.

F.........	17°	52′	09″,1748	+ (8) — (7)
T.........	89	38	58,3833	+ (3)
M.........	72	28	52,8756	— (1)
	180	00	00,4337	

Ecuación.... 0 = + 0,4337 + (8) — (7) + (3) — (1)

Triángulo Filhaoussen — M'Sabiha — Tetica.

F.........	60°	50′	52″,3513	+ (7)
S.........	95	08	17,4210	+ (6)
T.........	24	00	51,0676	+ (4) — (3)
	180	00	00,8399	

Ecuación.... 0 = + 0,8399 + (7) + (6) + (4) — (3)

Tringulo M' Sabiha—Mulhacen—Filhaoussen.

S.........	78°	48'	21",5218	— (5) + (6)
M.........	22	28	21,6554	+ (2) — (1)
F.........	78	43	16,0279	+ (8)
	179	59	59,2051	

Ecuación.... $0 = -0{,}7949 - (5) + (6) + (2) - (1) + (8)$

Ecuación de lado

$$1 = \frac{\sin M\,T\,S.\ \sin M\,S\,F.\ \sin M\,F\,T}{\sin M\,F\,S.\ \sin M\,S\,T.\ \sin M\,T\,F}$$

	NUMERADOR	COTANGENTE
log sin [113° 40' 13",0313 + (4)]	= 9.9618342698	— 0,43835
log sin [78 48 21,5218 — (5) + (6)]	= 9,9916581239	+ 0,19789
log sin [17 52 09,1748 + (8) — (7)]	= 9,4869194554	+ 3,10177
(*)	9,4404118491	

	DENOMINADOR	COTANGENTE
log sin [78° 43' 16",0279 + (8)]	= 9,9915303379	+ 0,19944
log sin [16 19 37,8426 + (5)]	= 9,4488947800	+ 3,41373
log sin [89 38 58,3833 + (3)]	= 9,9999918761	+ 0,00612
	9,4404169940	

(*) No habiendo podido encontrar tablas de logaritmos de 10 cifras decimales, he tenido que calcularlos determinando la variación del *logaritmo-sinus* causada por el pequeño incremento de cada ángulo, y aplicando después estas correcciones á los mismos *logaritmos-sinus* de la *Memoria.*

log numerador....................	=	9,4404118491
log denominador..................	=	9,4404169940
	=	9,9999948551 — 10
Cuociente........................	=	0,999988150
		— 1,000000000
		— 0,000011850
log cuociente....................	=	$5,073718_n - 10$
C.^{to} log sin 1''....................	=	5,314425
$C = -2,4442$ log. C.........	=	$0,388143_n$

y la ecuación de condición (de lado) será

$$0 = -2,4442 - 0,00612\,(3) - 0,43835\,(4) - 3,61162\,(5) + 0,19789\,(6) - 3,10177\,(7) + 2,90233\,(8)$$

Sometiendo al método de los mínimos cuadrados estas cuatro ecuaciones de condición, se obtiene:

$[p\,p]$	$= +\,0,15248$	$[q\,q, 1]$	$= +\,0,10647$
$[p\,q]$	$= -\,0,05243$	$[q\,r, 1]$	$= +\,0,05922$
$[p\,r]$	$= +\,0,04018$	$[q\,s, 1]$	$= -\,0.10372$
$[p\,s]$	$= +\,0,13670$	$[r\,r, 2]$	$= +\,0,08704$
$[q\,q]$	$= +\,0,12450$	$[r\,s, 2]$	$= +\,0,16696$
$[q\,r]$	$= +\,0,04540$	$[s\,s, 3]$	$= +\,0,41995$
$[q\,s]$	$= -\,0,15072$	α	$= -\,0,43370$
$[r\,r]$	$= +\,0,13057$	β'	$= -\,0,98903$
$[r\,s]$	$= +\,0,14529$	γ''	$= +\,1,45929$
$[s\,s]$	$= +\,0,96381$	δ'''	$= -\,0,92968$

y resultan las siguientes ecuaciones normales:

$$0 = +0{,}4337 + 0{,}15248\ \mathrm{I} - 0{,}05243\ \mathrm{II} + 0{,}04018\ \mathrm{III} + 0{,}13670\ \mathrm{IV}$$
$$0 = +0{,}8399 - 0{,}05243\ \mathrm{I} + 0{,}12450\ \mathrm{II} + 0{,}04540\ \mathrm{III} - 0{,}15072\ \mathrm{IV}$$
$$0 = -0{,}7949 + 0{,}04018\ \mathrm{I} + 0{,}04540\ \mathrm{II} + 0{,}13057\ \mathrm{III} + 0{,}14529\ \mathrm{IV}$$
$$0 = -2{,}4442 + 0{,}13670\ \mathrm{I} - 0{,}15072\ \mathrm{II} + 0{,}14529\ \mathrm{III} + 0{,}96381\ \mathrm{IV},$$

de las cuales se deducen los valores de los *correlativos*

$$\mathrm{I} = -\ 14{,}35085$$
$$\mathrm{II} = -\ 23{,}13314$$
$$\mathrm{III} = +\ 21{,}01221$$
$$\mathrm{IV} = -\ 2{,}21378.$$

Finalmente, con estos valores se obtienen los que van á continuación para las correcciones de los ángulos:

$$(1) = +\ 0'',3307$$
$$(2) = +\ 0{,}9485$$
$$(3) = -\ 0{,}1568$$
$$(4) = -\ 0{,}5370$$
$$(5) = -\ 0{,}5833$$
$$(6) = -\ 0{,}3699$$
$$(7) = -\ 0{,}0899$$
$$(8) = -\ 0{,}0361.$$

Aplicando ahora á los ángulos estas correcciones halladas, resulta el siguiente

CUADRO DE ÁNGULOS COMPENSADOS

Angulos.	Esferóidicos ó geodésicos.	Esféricos	Planos.
T F M	17° 52′ 27″,2861	17° 52′ 27″,2846	17° 52′ 09″,2286
M T F	89 39 16,2802	89 39 16,2810	89 38 58,2265
T M F	72 29 10,5990	72 29 10,5996	72 28 52,5449
	180 00 54,1653	180 00 54,1652	180 00 00,0000
M S F	78 48 45,3163	78 48 45,3160	78 48 21,7352
F M S	22 28 45,8543	22 28 45,8558	22 28 22,2732
S F M	78 43 39,5738	78 43 39,5726	78 43 15,9918
	180 01 10,7444	180 01 10,7444	180 00 00,0002
T S M	16 19 51,7599	16 19 51,7591	16 19 37,2593
M T S	113 40 26,9924	113 40 26,9929	113 40 12,4943
T M S	50 00 24,7447	50 00 24,7450	50 00 10,2461
	180 00 43,4970	180 00 43,4970	179 59 59,9997
S F T	60 51 12,2877	60 51 12,2866	60 50 52,2614
T S F	95 08 37,0763	95 08 37,0759	95 08 17,0511
F T S	24 01 10,7121	24 01 10,7136	24 00 50,6874
	180 01 00,0762	180 01 00,0762	179 59 59,9999

Por el anterior cuadro se ve comprobado el siguiente teorema:

El exceso del triángulo geodésico es igual (despreciando los términos de orden superior al 5.°) *al de un triángulo esférico de iguales lados,* siempre que el radio de la esfera sea igual al radio de curvatura que corresponde al centro de gravedad del triángulo.

También se ven comprobadas las ecuaciones de condición de ángulo en dicho cuadro; así como la de lado, con suficiente aproximación, en el cálculo logarítmico que sigue:

log sin	113°	40′	12″,4943	=	9,9618347654
log sin	78	48	21,7352	=	9,9916582128
log sin	17	52	09,2286	=	9,4869198068
					9,4404127850
log sin	78	43	15,9918	=	9,9915303227
log sin	16	19	37,2593	=	9,4488905874
log sin	89	38	58,2265	=	9,9999918741
					9,4404127842

log numerador....... = 9,4404127850
log denominador..... = 9,4404127842

log cuociente........ = 0,0000000008

Pasando ya á la resolución de los triángulos, se obtiene el siguiente

CUADRO DE TRIÁNGULOS CORREGIDOS (*)

Estaciones.	Ángulos planos.	Logaritmos de los lados.	Lados en metros.
Filhaoussen......	17° 52′ 09″,2286	4,91817296	82827,20
Tetica............	89 38 58,2265	5,43124503	269926,17
Mulhacen.........	72 28 52,5449	5,41062784	257411,44
M'Sabiha.........	78 48 21,7352	5,43124503	„
Mulhacen.........	22 28 22,2732	5,02192935	105179,08
Filhaoussen......	78 43 15,9918	5,43111714	269846,74
M'Sabiha.........	16 19 37,2593	4,91817296	„
Tetica............	113 40 12,4943	5,43111714	269846,74
Mulhacen.........	50 00 10,2461	5,35355442	225711,88
Filhaoussen......	60 50 52,2614	5,35355442	„
M'Sabiha.........	95 08 17,0511	5,41062783	257411,44
Tetica............	24 00 50,6874	5,02192936	105179,08

El cálculo que precede se ha hecho partiendo del lado conocido Mulhacen—Tetica, tal como lo determinó nuestro Instituto Geográfico por triangulación que se apoya

(*) Careciendo de tablas de logaritmos de 8 cifras, me he visto obligado á aceptar los logaritmos de la *Memoria*, aplicándoles las pequeñas variaciones que he determinado para los nuevos argumentos por el cálculo diferencial.

en las bases españolas de Madridejos, Arcos y Cartagena. De él resulta el lado argelino M'Sabiha—Filhaoussen, igual á

$$105\,179^{m}.08.$$

Este mismo lado, determinado por la triangulación de Argelia, que se apoya en las bases francesas de Argel y Orán, parece ser igual á

$$105\,178^{m}.56$$

valor que solamente difiere del anterior en $0^{m}.52$.

El desvío relativo entre ambas magnitudes calculadas de este lado por las dos triangulaciones de España y Argelia, apoyadas respectivamente en bases tan lejanas entre sí, no alcanza por tanto más que á

$$\frac{0{,}52}{105179} \text{ ó 5 millonésimas.}$$

Es un resultado más satisfactorio aún que el obtenido en la *Memoria*, y que manifiesta el alto grado de precisión con que están ejecutadas las operaciones geodésicas de España y Argelia.

CAPÍTULO VII

ERRORES EN LA DETERMINACIÓN DE COORDINADAS GEOGRÁFICAS

Para la determinación de las coordinadas geográficas, los autores de la *Memoria* han procedido de la situación y azimut observados astronómicamente en M'Sabiha, que son

Latitud Norte........	35°	39′	37″,05
Longitud Oeste........	3	11	10,77
Azimut (Filhaoussen)...	46	54	11,76

En el cálculo emplearon las fórmulas exactas que publicó M. Andrœ en la triangulación de Dinamarca, basadas sobre la consideración del triángulo polar, y la Comisión española se refirió al elipsoide de Bessel, por ser el adoptado en España.

El azimut M'Sabiha—Filhaoussen 46° 54′ 11″,76 fué determinado astronómicamente para el vértice sensible Filhaoussen, no para el vértice *geodésico* Filhaoussen, que es la proyección horizontal de aquél sobre el elipsoide hipotético. Por consiguiente, al aplicar dichos autores el azimut tal como había sido observado, omitieron la corrección necesaria

$$\omega_H^{(h)} - \omega_H = -0'',0816,$$

que dejo calculada en el capítulo IV.

Ignoro cuáles sean las fórmulas exactas de M. Andrœ, empleadas para la determinación de las coordinadas geográficas, porque no se mencionan en la *Memoria,* ni tampoco he podido haber la obra danesa citada. Tengo idea de que dicho autor ha publicado fórmulas adecuadas á este propósito, procediendo, ya de la *línea y azimut geodésicos*, ya de la *sección vertical y azimut astronómico;* pero supongo que las adoptadas por aquellos señores serán las primeras, no solamente por ser las de común uso, sino también las más ventajosas para el cálculo. En tal caso, como el azimut empleado es *astronómico* (no por haber sido determinado directamente por medio de observación de astros, sino por referirse á la *sección vertical),* hicieron mal, á mi juicio, los autores, al introducirlo en el cálculo sin previa reducción á *azimut geodésico,* por medio de otra segunda corrección, que se obtiene fácilmente con la fórmula

$$\omega_H - \omega_g = \tau'' s^2 \cos^2 \varphi \sin 2 \omega + \tau''' s^3 \sin 2 \varphi \sin \omega,$$

en la cual φ es la latitud del punto de partida, s la extensión métrica de la distancia entre ambos puntos, ω el azimut observado, y τ'', τ''' dos coeficientes numéricos, cuyos logaritmos son

$$\log \tau'' = 8.45037 - 20$$
$$\log \tau''' = 1.04366 - 20.$$

En nuestro caso se obtiene por esta fórmula:

$\omega = 46^\circ\ 54'\ 12''$		$\varphi = 35^\circ\ 39'\ 37''$	
$s = 105179{,}08$ metros			
$2 \log s$	$= 10{,}04386$	$3 \log s$	$= 15{,}06579$
$\log \tau''$	$= 8{,}45037 - 20$	$\log \tau'''$	$= 1{,}04366 - 20$
$2 \log \cos \varphi$	$= 9{,}81963 - 10$	$\log \sin 2\varphi$	$= 9{,}97650 - 10$
$\log \sin 2\omega$	$= 9{,}99904 - 10$	$\log \sin \omega$	$= 9{,}86344 - 10$
log 1.er térm.o	$= 8{,}31290 - 10$	log 2.o término	$= 5{,}94939 - 10$

$$
\begin{array}{ll}
1.^{er}\ \text{término} & = +\ 0'',02055 \\
2.^{o}\quad\ \text{"} & = +\ 0{,}00009 \\
\hline
\omega_H - \omega_g & = +\ 0{,}02064.
\end{array}
$$

Sumada esta corrección con la mencionada antes, da por resultado

$$\omega_H^{(h)} - \omega_g = -\,0'',061,$$

y por tanto, el azimut geodésico es

$$\omega_g = 46^\circ\ 54'\ 11'',821.$$

Tanto este azimut como los otros que se vayan obteniendo por el cálculo, se aplicarán á los ángulos compensados, pero no á los *esféricos* ni á los *horizontales,* sino á los *esferóidicos,* á fin de deducir sucesivamente los azimutes *geodésicos* de los demás vértices, necesarios en el cálculo de las fórmulas que han de servir para la determinación de las coordinadas geográficas. Las que yo empleo son las siguientes, que dan suficiente aproximación, aun para lados de 600 kilómetros:

$$u = s \cos \omega_{1.2} \qquad\qquad v = s \sin \omega_{1.2}$$

1.ª aproximación de $\log (F - \varphi_1)$ igual á

$$6{,}735_n - 10 + \log u + 3 \log W_o$$

$$\varphi_o = \varphi_1 + \frac{2}{3}(F - \varphi_1)$$

$$\log \rho = 6{,}8031893 - 2 \log W_o$$

$$\log x = \left\{ \begin{array}{l} \log u + \frac{1}{3} M \frac{v^2}{\rho^2} - \frac{1}{15} M \frac{u^2 v^2}{\rho^4} \\ + \frac{7}{90} M \frac{v^4}{\rho^4} - \frac{1}{36} M e^2 \frac{u v^2}{\rho^3} \sin 2\varphi_o \end{array} \right\} \qquad (1)$$

$$\log y = \left\{ \begin{array}{l} \log v - \frac{1}{6} M \frac{u^2}{\rho^2} - \frac{1}{15} M \frac{u^2 v^2}{\rho^4} \\ - \frac{1}{180} M \frac{u^4}{\rho^4} + \frac{1}{18} M e^2 \frac{u^3}{\rho^3} \sin 2\varphi_o \end{array} \right\} \qquad (2)$$

$$\log \Delta\omega = \left\{ \begin{array}{l} \log \left(- \frac{1}{2} \rho'' \frac{u v}{\rho^2}\right) + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} M \frac{v^2}{\rho^2} \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} M \frac{u^2}{\rho^2} \end{array} \right\} \qquad (3)$$

1.ª aproximación de $\varphi_m = \varphi_1 + \frac{1}{2}\left(F - \varphi_1\right)$

2.ª aproximación de $\varphi_m = \varphi_1 - \dfrac{1.^a \text{ aproximación de } \left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right)}{2}$

$$\log \left(\frac{\rho''}{\rho_m}\right) = 8{,}5126900{,}3 - 10 + 3 \log W_m$$

$$\varphi_1 + F = 2\varphi_m$$

$$\log \beta_4 = \left\{ \begin{array}{l} 2{,}93171 - 10 + \log \Big[\cos(\varphi_1 + F) \\ - 0{,}01172 \cos^2(\varphi_1 + F) + 0{,}00803 \Big] \end{array} \right\}$$

$$\log(\varphi_1 - F) = \log\left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right) - \beta_4 \left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right)^2$$

$$\log \eta = \log y + \log W_F + 8{,}5097816.7$$

$$\log \operatorname{tang} \Delta l = \log(\operatorname{tang} \eta \sec F) + \frac{Me^2}{15\, \rho''^4} \eta^2 \sin^2 F$$

$$\log \operatorname{tang} t = \left\{ \begin{array}{l} \log(-\sin \eta \operatorname{tang} F) - \dfrac{Me^2}{6(1-e^2)\, \rho''^2} \eta^2 \cos^2 F \\ \qquad + \dfrac{Me^2}{90\, \rho''^4} \eta^4 (8 \cos^2 F - 9) \end{array} \right\}$$

$$\omega_{2 \cdot 1} = \omega_{1 \cdot 2} + 180^\circ + \Delta\omega + t, \qquad \varphi_k = F - \frac{3}{4}(F - \varphi_2)$$

$$\log \sin(F - \varphi_2) = \left\{ \begin{array}{l} \log\left(\sin \eta \sin F \operatorname{tang} \dfrac{\Delta l}{2} \cdot \dfrac{W_k^2}{1-e^2}\right) \\ - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Me^2}{6(1-e^2)\, \rho''^2} \eta^2 \cos^2 F \end{array} \right\}$$

En estas fórmulas φ_1 y φ_2 representan las latitudes geográficas del punto de partida y del punto de llegada, Δl la diferencia en longitud occidental del segundo con respecto al primero, s la distancia geodésica expresada en metros, $\omega_{1 \cdot 2}$ el azimut geodésico del punto de llegada, considerado desde el de partida y contado del Sur al Oeste, de 0° á 360°, $\omega_{2 \cdot 1}$ el azimut análogo opuesto y W una cantidad función de la latitud, de suerte que W_1, W_o, W_m, W_F designan los valores de W correspondientes á las latitudes geográficas φ_1, φ_0, φ_m, φ_F, los cuales pueden calcularse por la fórmula

$$W = \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$e^2 = 0{,}006674372096$$

ó, para mayor comodidad, con las fórmulas

$$\log Mn = 3{,}86158770, \qquad \log\left(-\frac{Mn^2}{2}\right) = 0{,}78436_n$$

$$\log\left(\frac{Mn^3}{3}\right) = 0{,}83 - 3$$

$$\log W = \left\{ \begin{array}{l} 9.9992735188 - 10 + Mn \cos 2\varphi \\ -\dfrac{Mn^2}{2} \cos 4\varphi + \dfrac{Mn^3}{3} \cos 6\varphi \end{array} \right\} \qquad (*)$$

La primera aproximación de $(F - \varphi_1)$ resulta expresada en minutos, y para calcularla se necesita el empleo de W_o, cuyo argumento φ_o aun no se conoce; pero como solamente se trata de una aproximación para la cual bastan 3 cifras decimales en ~~los lo~~garitmos, se presupone por tanteo un valor de φ_o, sin perjuicio de repetir el cálculo después que se conozca su verdadero valor, siempre que la diferencia entre éste y el supuesto pueda alterar la tercera cifra decimal de 3 log W_o.

(*) Como el empleo de W es de mucho uso en estas fórmulas, conviene tenerlo tabulado con φ por argumento. Hay tablas que dan con 10 cifras decimales el logaritmo de W para latitudes comprendidas entre 47° y 57° y otras que lo dan con 8 cifras para toda latitud, publicadas ambas en la obra ya referida de Helmert.

Los valores de

$$\left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right), \ (\varphi_1 - F), \ \Delta\,\omega, \ \eta,$$

resultan expresados en segundos. Se hacen dos aproximaciones sucesivas de φ_m para hallar los valores correspondientes de W_m, el primero de los cuales es necesario para la segunda aproximación. Lo mismo sucede con sin $(F - \varphi_2)$ que debe determinarse dos veces: la primera poniendo W_F en vez de W_k, puesto que este último valor todavía no es conocido, y la segunda agregando al log sin $(F - \varphi_2)$ hallado, la cantidad $2 \log W_k - 2 \log W_F$, después de calcular φ_k por su fórmula y hallar el correspondiente valor de $\log W_k$. Las otras cantidades que figuran en las anteriores expresiones, ó no precisa explicar su significación ó son constantes, cuyos valores numéricos van á seguida:

$\log\left(\frac{1}{3} M\right)$	$= 6.1606630$	$\log\left(\frac{7}{90} M\right)$	$= 5.5286$
$\log\left(\frac{1}{6} M\right)$	$= 5.8596330$	$\log\left(\frac{1}{18} Me^2\right)$	$= 3.207$
$\log\left(\frac{1}{2} \rho''\right)$	$= 5.0133951$	$\log\left(\frac{Me^2}{15 \rho''^4}\right)$	$= 2.0284 - 20$
$\log\left(\frac{1}{15} M\right)$	$= 5.4617$	$\log\left(\frac{Me^2}{6(1 - e^2)\rho''^2}\right)$	$= 3.0581 - 10$
$\log\left(\frac{1}{180} M\right)$	$= 4.383$	$\log\left(\frac{Me^2}{90 \rho''^4}\right)$	$= 1.250 - 20$
$\log\left(\frac{1}{36} Me^2\right)$	$= 2.906$	$\log\left(\frac{1}{1 - e^2}\right)$	$= 0.00290836$

El valor de F se deduce inmediatamente del hallado para $(\varphi_1 - F)$. Más adelante se obtiene el valor de $(F - \varphi_2)$ por su respectiva fórmula, y finalmente el de φ_2 por

$$\varphi_2 = F - (F - \varphi_2)$$

Como la aplicación de estas fórmulas parece algo complicada, pongo á continuación una que hice de ellas para determinar la situación geográfica del vértice Filhaoussen, partiendo de la astronómica de M'Sabiha,

Latitud N.	35°	39′	37″,050
Longitud O.. . . .	3	11	10,770,

y de los datos

$$s = 105179^{m},08$$
$$\omega_{SF} = 46^\circ \ 54' \ 11'',821;$$

precedida esta aplicación de la pequeña tabla que calculé previamente y me fué de gran auxilio en ésta y en las otras determinaciones de coordinadas geográficas, por contener los valores de *log W* para todas las latitudes del cuadrilátero de enlace.

Latitud.		Logaritmo *W*	Diferencias.
35°		9,9995226635	
			— 59651
35	15′	5166986	
			59837
35	30	5107149	
			60018
35	45	5047131	
			60196
36		4986935	
			60363
36	15	4926572	
			60541
36	30	4866031	
			60695
36	45	4505336	
			60862
37		4744474	
			61014
37	15	4683460	

$\log s = 5{,}0219293{,}5$

$\log \cos \omega = 9{,}8345681{,}8 - 10$

$\log \sin \omega = 9{,}8634426{,}9 - 10$

$\log u = 4{,}8564975{,}3$

$\log v = 4{,}8853720{,}4$

$\log \frac{u}{\rho} = 8{,}0523426{,}7 - 10$

$\log \frac{v}{\rho} = 8{,}0812171{,}8 - 10$

$\log\left(-\frac{1}{2}\rho''\right) = 5{,}0133951_n$

$\log\left(-\frac{1}{2}\rho'' \frac{uv}{\rho^2}\right) = 1{,}1469549{,}5_n$

$\log u = 4{,}856$

$3 \log W_0 = 9{,}999$ (*)

$= 6{,}735_n$

$\log (F - \varphi_1) = 1{,}590_n$ 1.ª apr.ⁿ

$\varphi_0 = 35^\circ 39'{,}6 - \frac{2}{3} \cdot 38'{,}9 = 35^\circ 13'{,}7$

$\log W_0 = 9{,}9995172{,}2 - 10$

$2 \log W_0 = 9{,}9990344{,}4 - 10$

$6{,}8031893$

$\log \rho = 6{,}8041548{,}6$

FÓRMULA (1)	FÓRMULA (2)	FÓRMULA (3)
4,8564975,3	4,8853720,4	1,1469549,5
+ 210,4	— 92,1	+ 263,0
0,0	0,0	— 46,0
0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	
4,8565185,7 = log x	4,8853628,3 = log y	1,1469766,5 = log $\Delta\omega$

(*) Suponiendo $\varphi_0 = 35^\circ 15'$.

Argumento para W_m:

1.ª aproximación:

$35^\circ\,39',6 - \frac{1}{2}\cdot 38',9 = 35^\circ\,20',2$

$\frac{\rho'' x}{\rho_m} = 2332'',128 = 38',8688$

	35°	$39',6175$
2.ª aproximación.	$-$	$19,4344$
	35	$20,1831$

$\varphi_1 - F = 38'\ 52'',128$

$\varphi_1 + F = 70^\circ\ 40',366$

$\log\cos(\varphi_1 + F) = 9,040 - 10$

$\log\beta_4 = 1,972 - 10$

$F = 35^\circ\ 00'\ 44'',9222$

$\log x = 4,8565185,7$

$\log\left(\frac{\rho''}{\rho_m}\right) = 8,5126900,3-10$

$3\log W_m = 9,9985438,7-10$

$\log\left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right) = 3,3677524,7$

$3\log W_m = 9,9985438,9-10$

$\log\left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right) = 3,3677524,9 - \cancel{10}$

$-\beta_4\left(\frac{\rho'' x}{\rho_m}\right)^2 = 0,0$

$\log(\varphi_1 - F) = 3,3677524,9$

$\log y = 4,8853628,3$

$8,5097816,7-10$

$\log W_F = 9,9995223,8-10$

$\log \eta = 3,3946668,8$

$\log \eta = 3,3946668,8$

$4,6855644,2-10$

$\log\sin\eta = 8,0802313,0-10$

$\log\operatorname{tang} F = 9,8454280,5-10$

$-\frac{Me^2}{6(1-e^2)\rho''^2}\eta^2\cos^2 F \quad -0,5$

$\log\operatorname{tang} t = 7,9256593_n - 10$

$4,6855852 - 10$

$\log t = 3,2400741_n$

$\log \eta = 3,3946668,8$

$4,6855958,6-10$

$\log\operatorname{tang}\eta = 8,0802627,4-10$

$\log\sec F = 0,0867017,3$

$\log\operatorname{tang}\Delta l = 8,1669644,7-10$

$\Delta l = 00^\circ\ 50'\ 29'',412$

$L_1 = 3\ \ 11\ \ 10,770$

$L_2 = 4\ \ 01\ \ 40,182$

t	$= -$	$00^\circ\ 28'\ 58'',097$
ω_{SF}	$=$	$46\ \ 54\ \ 11,821$
$\Delta\omega$	$= -$	$14,032$
		180
ω_{FS}	$=$	$226\ \ 24\ \ 59,692$
F	$=$	$35^\circ\ 00',75$
$\frac{3}{4}(F-\varphi_2)$	$=$	$00,13$
φ_k	$=$	$35\ \ 00,62$
$F-\varphi_2$	$=$	$10'',501$
φ_2	$=$	$35^\circ\ 00'\ 34'',421$

$\log \sin \eta$	$=8,0802313,0-10$
$\log \sin F$	$=9,7587263,7-10$
$\log \operatorname{tang} \frac{\Delta l}{2}$	$=7,8659109,7-10$
$2 \log W_F$	$=9,9990447,6-10$
C.to $\log(1-e^2)$	$=0,0029084$
$-\frac{1}{2}\frac{Me^2}{6(1-e^2)\rho''^2}\eta^2\cos^2 F$	$=\ -0,2$
1.er $\log \sin (F-\varphi_2)$	$=5,7068217,8-10$
$2\log W_k - 2\log W_F$	$=\ +1,0$
2.° $\log \sin (F-\varphi_2)$	$=5,7068218,8-10$
	$4,6855749\ -10$
$\log (F-\varphi_2)$	$=1,0212469,8$

Resultados.......

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi_2 & = & 35^\circ\ 00'\ 34'',421 \\ L_2 & = & 4\ \ 01\ \ 40,182 \\ \omega_{FS} & = & 226\ \ 24\ \ 59,692 \end{array}\right.$$

Siguiendo el mismo camino para los demás vértices, se obtienen los valores contenidos en el siguiente

CUADRO DE COORDINADAS GEOGRÁFICAS

ESTACIONES	ELIPSOIDE DE BESSEL	
M'Sabiha...	Latitud.......... =	35° 39′ 37″,050
	Longitud.......... =	3 11 10,770
	Azimut (Filhaoussen). =	46 54 11,821
Filhaoussen.	Latitud........... =	35 00 34,421
	Longitud.......... =	4 01 40,182
	Azimut (M'Sabiha)... =	226 24 59,692

Sigue el CUADRO DE COORDINADAS GEOGRÁFICAS

ESTACIONES	ELIPSOIDE DE BESSEL			
Mulhacen. . .	Latitud. . . . . =	37°	03′	18″,056
	Longitud. . . . . =	5	38	59,396
	Azimut (Tetica). . . . . =	254	14	53,935
Tetica.	Latitud. . . . . =	37	15	15,265
	Longitud. . . . . =	4	45	04,089
	Azimut (Mulhacen). . . =	74	47	27,986

Las diferencias entre estos resultados y los que expone la *Memoria*, como puede verse en el resumen comparativo inserto en mi *Conclusión*, son demasiado considerables para que pueda atribuirse su origen únicamente á las diferencias antes halladas en ángulos, lados y azimut inicial. Alguna causa más habrá contribuído por otro concepto á engrosar aquellas, y quizás sea una adopción distinta de los elementos del elipsoide. Aunque yo he supuesto el de Bessel, por ser éste el que la *Memoria* dice haber también adoptado, conviene aclarar cuáles son los elementos de este elipsoide que se han introducido en los cálculos, ya que en 1837 Bessel determinó unos y en 1841 calculó otros, corrigiendo los primeros por errores hallados en una de las mediciones de arco de meridiano que sirvieron para la primera determinación. (Véase *Rud. Engelmann, Abhandlungen von F. W. Bessel.* Leipzig, 1876, tomo III, pág. 62.) Los elementos que yo he adoptado son los últimos, esto es, los de 1841, representados por los semiejes de la elipse generatriz,

$$a_o = 3272077{,}14 \text{ toesas}$$
$$b_o = 3261139{,}33 \quad \text{„}$$

ó, en metros,

$$a_o = 6377397{,}15500 \text{ metros}$$
$$b_o = 6356078{,}96235 \quad ,,$$

$$n = \frac{a_o - b_o}{a_o + b_o} = 0{,}001674184767 \quad (*)$$

$$\log\, a_o = 6{,}8046434{,}637$$
$$\log\, b_o = 6{,}8031892{,}839$$

Después de calculadas las coordinadas geográficas de los vértices del cuadrilátero con el origen de las astronómicas de M'Sabiha, pasa la *Memoria* á comparar las coordinadas geodésicas obtenidas para Tetica, con las astronómicas observadas en el mismo vértice, á fin de averiguar cómo satisfacen á la relación dada por Laplace en su *Mecánica celeste*,

$$\omega_a - \omega_g + (L_a - L_g) \sin \varphi = 0$$

Como tampoco la *Memoria* explica la notación de esta fórmula, lo haré yo del modo que la entiendo.

Si consideramos dos puntos A y B del elipsoide hipotético, ω_a representa el azimut observado astronómicamente en B de la dirección hacia A, ω_g el mismo azimut obtenido por *trasmisión geodésica* (esto es, el azimut que se determina, partiendo de otro ya conocido $A\ B$ y mediante el cálculo de la red de triángulos y de las fórmulas que ligan entre sí los opuestos azimutes de una misma línea geodésica) y L_a, L_g las longitudes que re-

(*) Encke, *Berliner Astronomischen Jahrbuch von 1852*, página 322 y siguientes. También tiene tablas para algunas funciones de a_o y b_o.

sulten para el punto *B*, partiendo de la conocida del punto *A*, y aplicando á ésta la diferencia en longitud entre ambos puntos, ya la observada astronómicamente, ya la obtenida por el cálculo geodésico de la red de triángulos y de las fórmulas de coordinadas geográficas.

Entiendo también que, para comparar entre sí los dos azimutes citados ω_a y ω_g, es preciso que se refieran á una misma y única dirección $B\,A$, bien sea esta única dirección la *línea geodésica*, bien la *sección vertical*, que ambas radican sobre el elipsoide y unen los dos puntos considerados; y que si uno de los dos azimutes estuviera referido á una de las dos direcciones dichas y el otro á la otra, sería necesario previamente aplicar á uno de ellos la debida corrección, para que quedara referido á la misma línea que el otro; y así la comparación sería legítima. Por igual motivo, si el azimut determinado directamente por observación astronómica se refiere al *objeto* y no al *vértice geodésico* (que como ya se ha dicho es la *proyección horizontal del objeto)*, necesita antes ser corregido por razón de la altura del objeto sobre el elipsoide, para que resulte referido á la superficie del mismo, en la cual se ha de practicar la comparación con ω_g.

Hago hincapié en estas premisas, por haber aquí palabras que parecen tener doble significado y pueden inducir á equivocada interpretación. *Azimut astronómico* de un punto *B*, visto desde *A*, es el ángulo formado por el meridiano de *A* con la *sección vertical* de *A* que pasa por *B*, bien se observe directamente por medio de los astros, bien se deduzca por cálculo geodésico que derive de otro azimut ya conocido. Inversamente, si mediante observaciones astronómicas fuera posible observar el ángulo que forma el mismo meridiano de *A* con la línea geodésica *A B*, éste no sería *azimut astronómico,* sino *geodésico,* aunque determinado astronómicamente.

Parece que los autores de la *Memoria* no dan valor á estas distinciones, puesto que comparan el azimut de la *sección vertical del objeto,* determinado por medios astronómicos, con el azimut calculado de la *línea geodésica* (y no del objeto, sino de su proyección horizontal), direcciones las dos que son distintas entre sí por más de un motivo. Para comparar un azimut con otro, creo necesario antes reducirlos á una misma dirección, aplicándoles con este objeto las correcciones que sean pertinentes al propósito de alcanzar dicho fin. Sea esta dirección en que han de compararse el azimut determinado directamente por observación atronómica y el otro calculado mediante *trasmisión geodésica,* la línea geodésica Tetica—M'Sabiha que radica sobre el elipsoide hipotético entre los dos *vértices geodésicos* nombrados. En Tetica se halló, por medio de observaciones astronómicas, que el *azimut astronómico* del lado Tetica—Gigante es igual á

$$214^{\circ}\ 57'\ 58''{,}72.$$

Para ligarlo con el cuadrilátero de enlace supongo que se usaría el ángulo Gigante—Tetica—Mulhacen de

$$140^{\circ}\ 10'\ 23''{,}36, \qquad (*)$$

con el cual se obtiene el *azimut astronómico* Tetica—Mulhacen

$$74^{\circ}\ 47'\ 35''{,}36.$$

Este azimut se refiere á Mulhacen *(objeto):* para obtener el azimut del *vértice geodésico* Mulhacen, hay que aplicar la corrección calculada anteriormente (capítulo IV),

$$\omega_H^{(h)} - \omega_H = -\ 0''{,}1228,$$

(*) Aunque tal dato no figure de una manera explícita en la *Jonction*, creo que lo está implícitamente, y consta además en las *Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico*, tomo VI, página 90.

con la que se obtiene

$$74^\circ\ 47'\ 35''\!.4828.$$

Ya estamos en la superficie del elipsoide hipotético; pero este último azimut es todavía *astronómico,* esto es, de la *sección vertical,* y como vamos á tratar con líneas y ángulos geodésicos, conviene reducirlo á ***azimut geodésico***, para lo cual emplearé la misma fórmula que, páginas atrás, sirvió en caso análogo respecto al vértice M'Sabiha. El cálculo de esta fórmula da ahora

$$\omega_H - \omega_g = + 0''\!.0063;$$

por consiguiente, el ***azimut geodésico*** Tetica—Mulhacen será

$$74^\circ\ 47'\ 35''\!.4765.$$

Restándole el ángulo geodésico compensado Mulhacen—Tetica—M'Sabiha, igual á

$$113^\circ\ 40'\ 26''\!.9924,$$

se obtiene, como determinación astronómica (*) del ***azimut geodésico*** Tetica—M'Sabiha,

$$321^\circ\ 07'\ 08''\!.484.$$

Otro valor se halla para el mismo ***azimut geodésico***

(*) En rigor no es ya directamente astronómica esta determinación, pues han intervenido algunos datos geodésicos; pero no habiéndonos apartado del vértice en que se practicó la observación astronómica, conviene designarla así, para distinguirla de la determinación del mismo azimut que se haga por verdadera *trasmisión geodésica*, esto es, por el origen de un azimut observado en otro vértice y mediante el cálculo de la triangulación y de las fórmulas que ligan entre sí los azimutes opuestos, de una misma línea geodésica.

Tetica—M'Sabiha, por los medios que he llamado de *trasmisión geodésica,* tomando como origen el azimut observado astronómicamente en M'Sabiha y valiéndose de los datos que proporciona la red geodésica ya calculada y de las fórmnlas que ligan entre sí á los azimutes opuestos de una misma línea geodésica. Por este segundo camino se obtiene

$$321^\circ\ 07'\ 00'',994.$$

El valor anteriormente hallado y éste son comparables entre sí, por ser los valores ω_a y ω_g de un mismo ángulo, á saber, el ángulo formado por el meridiano de Tetica con la línea geodésica Tetica—M'Sabiha y conocido con el nombre de *azimut geodésico* de M'Sabiha respecto á Tetica. No pasa lo mismo en la *Jonction*, puesto que allí se compara la determinación *astronómica* de un ángulo, con la calculada, mediante *trasmisión geodésica,* de otro ángulo, esencialmente y por varios motivos, distinto de aquel, procedimiento que creo inaceptable.

Continuando ahora el cálculo para la fórmula de comprobación dada por Laplace, se obtiene:

Azimut geodésico DE TETICA — M'SABIHA	LONGITUD DE TETICA
$\omega_a = 321^\circ\ 07'\ 08'',484$	$L_a = 4^\circ\ 44'\ 55'',337$ (*)
$\omega_g = 321\ \ 07\ \ 00,994$	$L_g = 4\ \ 45\ \ 4,089$
	$L_a - L_g = -\ 8,752$
$\omega_a - \omega_g = +\ 7,490$	$(L_a - L_g) \sin \varphi = -\ 5,298$

(*) No me ha sido posible averiguar la verdadera diferencia en longitud astronómica entre Tetica y M'Sabiha, porque de los datos que se encuentran en y la fórmula se convierte en

$$7{,}490 - 5{,}298 = 2{,}192.$$

La *Memoria*, por otro camino y con distinto valor de L_a, halla

$$6{,}77 - 4{,}27 = 2{,}50.$$

Ni uno ni otro resultado satisfacen cuanto fuera de desear á la fórmula de comprobación

$$\omega_a - \omega_g + (L_a - L_g) \sin \varphi = 0; \qquad (x)$$

pero dan una aproximación de ella bastante regular si se atiende á la gran distancia que media entre los dos puntos considerados. Lo que falta para el perfecto cum-

---

la *Jonction* resultan dos valores distintos. En la parte tercera hallo por resultado de las observaciones astronómicas y cálculos consiguientes,

$$6^m\ 14^s{,}979,$$

como diferencia en longitud entre los dos pilares astronómicos, igual á

$$1°\ 33'\ 44''{,}685.$$

Los pilares geodésicos parecen ser, según el texto y por el dibujo de la *Pl. VI*, los centros de estación. El pilar astronómico en M'Sabiha fué el mismo geodésico; pero el de Tetica estaba $2^m{,}92$ distante del geodésico y exactamente al Oeste de aquél; luego la diferencia en longitud entre los centros de estación sería $0''{,}118$ menor que la observada, é igual por tanto á

$$1°\ 33'\ 44''{,}567. \qquad (V_1)$$

Por otro lado, en la parte segunda da la *Jonction* los valores siguientes:

Longitud astronómica de Tetica.............	4° 44′ 56″,03
Idem íd. de M'Sabiha..............................	3 11 10,77.

De ellos se deduce, para la diferencia en longitud astronómica,

$$1°\ 33'\ 45''{,}26. \qquad (V_2)$$

Los dos valores (V_1) y (V_2), diferentes entre sí, están legítimamente deducidos de los datos que proporciona la *Jonction*, y como son igualmente fidedignos, cabe perplejidad en elegir uno con preferencia al otro. Si se elige el primero, que parece el más directo, la longitud astronómica de Tetica será

$$4°\ 44'\ 55''{,}387,$$

que es el valor por mí adoptado.

plimiento de la fórmula debe atribuirse principalmente á error en los azimutes observados, no solamente porque la observación de longitud fué mucho más esmerada que la de azimutes, sino también porque entre todos los errores que pueden causar variación en el primer miembro de la fórmula son los de azimut los más influyentes.

En efecto, si s representa la distancia entre los dos puntos A y B considerados, expresada en metros, a_0 el semieje mayor del elipsoide con la misma unidad de medida; φ_1, φ_2 las latitudes geográficas de A y B, determinadas astronómicamente; $\omega_{1.2}$, $\omega_{2.1}$ los azimutes de AB y BA, observados también en forma astronómica; $L_2 - L_1$ la diferencia en longitud observada y con signo positivo cuando B esté al occidente de A; y, finalmente, $d\,s$, $d\,\omega_{1.2}$, $d\,\omega_{2.1}$, $d\,\varphi_1$ y $d\,(L_2 - L_1)$ las pequeñas correcciones que necesitan los valores observados para convertirse en verdaderos; el influjo sobre el primer miembro de la fórmula anterior está representado por la expresión siguiente (y),

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\varphi\; d\,(L_2 - L_1) - \sin(L_2 - L_1)\cos\varphi_2\, d\,\varphi_1 - d\,\omega_{2.1} \\ + \left[\cos(L_2 - L_1)\cos\varphi_1 \sec\varphi_2 - \dfrac{s}{a_0}\tan g\,\varphi_2 \cos\omega_{2.1}\right] d\,\omega_{1.2} \end{array}\right\} \quad (y),$$

la cual muestra que la fórmula (x) es independiente del error $d\,s$; casi lo es del error en latitud; depende poco para bajas latitudes del error en longitud, y es por lo tanto una excelente comprobación de las observaciones azimutales.

La expresión (y) se convierte para el presente caso en $0{,}605\; d\,(L_2 - L_1) - 0{,}022\; d\,\varphi_1 - d\,\omega_{2.1} + 0{,}999\; d\,\omega_{1.2}$, por donde se ve con más claridad que, como antes dije, la escasa inexactitud hallada en la comprobación debe atribuirse principalmente á errores en los azimutes observados.

CAPÍTULO VIII

ALGO SOBRE EL ENLACE ASTRONÓMICO

Concluída la medición de los ángulos en los cuatro vértices del cuadrilátero, se procedió en dos de ellos (Tetica por parte de España y M'Sabiha por parte de Argelia) á la observación astronómica de las latitudes, azimutes y diferencia en longitud, con el fin de alcanzar el enlace astronómico hispano-argelino, ya que el geodésico quedó brillantemente conseguido. Era este enlace de interés científico, por cuanto estaba llamado, no solamente á unir las redes astronómicas de España y Argelia, sino también á cerrar y completar el gran polígono que comprende á Madrid, París, Marsella y Argel, cuyas diferencias en longitud habían sido yá determinadas por medio del telégrafo.

Parece natural que con tan importante motivo y para colocarse á la altura de las excepcionales circunstancias y al nivel de la terminada excelente campaña geodésica, se empleara á tal fin en instrumentos, métodos y observaciones, todo lo más selecto, exacto y acabado que la más noble de las ciencias físicas tiene en reserva para las grandes ocasiones.

Y así fué, en efecto, por lo tocante á la diferencia en longitud, á cuya determinación se aplicó, sin duda alguna, el mejor de los métodos que pudo elegirse, no habiendo cable eléctrico que uniera las dos estaciones, y se llevó la prolijidad, con sobrada razón, hasta determinar dos clases de ecuación personal, la una astronómica y la otra referente á la observación de señales luminosas. Para esta última, los dos astrónomos, colocados á pocos metros de distancia uno del otro, observaban mediante anteojos iguales las ocultaciones (en número de 9.000) de la luz emanada al través de un colimador óptico situado á larga distancia, y registraban sobre un mismo cronógrafo las respectivas observaciones. En este cronógrafo una tercera pluma registraba también el batido del péndulo, y me ocurre que aun hubiera sido posible colocar una cuarta que, unida eléctricamente al interruptor causante de las ocultaciones, registrara también, de manera automática, el momento real del fenómeno observado, con lo cual hubieran podido determinarse, no solamente la ecuación personal *relativa* entre los dos astrónomos, sino además la *absoluta* de cada uno de ellos.

En la observación de azimutes y latitudes, sin embargo, hubiera podido hacerse más y mejor que lo practicado, aceptable quizás para circunstancias ordinarias y de poca monta (*), pero falto del alto vuelo que á esta majestuosa operación parece corresponder.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Latitud de M'Sabiha..............	35°	39′	37″,05	± 0″,10
Azimut M'Sabiha—Filhaoussen....	46	54	11,76	
Latitud de Tetica.................	37	15	11,9	± 0″,09
Azimut Tetica—Gigante..........	214	57	58,72	± 0″,19

(*) Nuestra Comisión Hidrográfica, cuyo cometido, por la índole especial del objeto de sus trabajos, no requiere este grado superior de exactitud, y pobrísimamente dotada de instrumentos, etc., emplea, sin embargo, métodos más correctos y elegantes en las observaciones de latitud y azimut de Tarragona, Rosas, Palma de Mallorca y otros puntos; tanto. que ella misma estima que algunas de sus determinaciones astronómicas tienen un grado de precisión excesivo, con relación á sus poco dispendiosos trabajos geodésicos; pero juzga fundadamente que nunca puede ser perjudicial emplear los métodos astronómicos más adecuados y obtener toda la exactitud que pueden dar sus instrumentos. (Véase *Observaciones astronómicas en Tarragona, 1883.—Latitud.—Azimut*, página 9.)

Diferencia en longitud entre M'Sabiha y Tetica:

$$6^{m}\ 14^{s},979 \pm 0^{s},013.$$

En M'Sabiha se determinó el azimut de una manera indirecta, utilizando las observaciones que se habían hecho á una mira, con el fin de hallar las correcciones de colimación y azimut del instrumento, durante la observación de diferencia en longitud. Ni siquiera juzgaron necesario en Argelia el cálculo del error medio ó probable del azimut observado.

En Tetica se determinó el azimut con un teodolito de Repsold, comparando directamente el vértice Gigante con la Polar en las primeras horas de la mañana y últimas de la tarde, cualquiera que fuese la distancia de la estrella á su digresión máxima; en todo 32 medidas solamente de un ángulo horizontal.

El caso pedía en ambos vértices muchas observaciones, dos marcas de referencia en los verticales de las máximas digresiones de una estrella circumpolar (para anular la influencia del error en declinación), colimador, cronógrafo, etc., y todo esto acompañado de cuantas precauciones y variaciones sistemáticas suelen hacerse en tales casos para destruir y compensar en lo posible los errores que no se pueden eludir.

Es muy cierto que era ya el mes de Noviembre y urgía desalojar pronto la peligrosa estación de Tetica, antes que las nieves se posesionaran de ella; pero si las circunstancias eran apremiantes por la aproximación del invierno, y si los ánimos estaban enervados por una temperatura de diez grados bajo cero, poco hubiera costado en los meses de Junio y Julio del año siguiente subir de nuevo á aquellas cumbres, y con toda calma y comodidad, durante las hermosas noches del verano, resplandeciente el cielo por la rarefacción de la atmósfera en tales alturas, haber practicado de manera conveniente, exacta y minuciosa las observaciones de latitud y azimut, ya que para ellas no hacían falta ni máquinas de vapor, ni los grandes aparatos eléctricos, ni piezas voluminosas, ni aun la mayor parte del personal y material que fué indispensable para la medición geodésica, y cuya ascensión é instalación ocasionó exorbitante trabajo y gasto (*).

La latitud se determinó en M'Sabiha por observación de las distancias zenitales de estrellas culminantes á menos de 30 grados del zenit, unas al Norte y otras al Sur de él, y repartidas del modo siguiente:

Distancia zenital.	Al Sur.	Al Norte.
Entre 25° y 30°...	3	1
— 20 y 25 ...	5	3
— 15 y 20 ...	3	1
— 10 y 15 ...	3	9
— 5 y 10 ...	3	2
— 0 y 5 ...	6	1

Ni el método, ni la elección de estrellas puede satisfacer al que aspira á un alto grado de exactitud. Hay otros sistemas reconocidamente más exactos, y aun dentro del elegido hubiera sido conveniente adoptar estrellas que, dos á dos, culminaran á uno y otro lado del zenit y á iguales distancias aproximadamente de él para mejor compensar los errores de flexión y refracción.

Más endeble aún fué la determinación de latitud en Tetica, pues se redujo á la observación de distancias ze-

(*) El mismo Instituto Geográfico tenía entre sus observaciones un modelo que imitar en el ázimut de San Fernando—Gibalbín, inserto en el tomo II de sus *Memorias*.—Su error probable es de 0",14.—Y aun pudiera haberse perfeccionado en la solemne ocasión del enlace astronómico, registrando las horas cronográficamente y aumentando el número de mediciones del ángulo horizontal, con lo cual quizás se lograra un error probable de ± 0",10 ó menor.

nitales circunmeridianas de nueve estrellas solamente, hecha con teodolito de Repsold. Estas distancias zenitales estaban repartidas á un lado y otro del zenit, entre 22º y 41º; por consiguiente, la refracción y sus errores pudieron ser de alguna importancia. Se corrigió del solo error de flexión la latitud obtenida por cada estrella, deduciendo éste de las propias observaciones, en las cuales estaban englobados los de refracción, observación, graduación del instrumento, lectura, declinación de las estrellas y otros. No se hizo uso, por falta de tiempo, del buen instrumento de paso que había en la estación y con el cual hubiera podido practicarse una bonita determinación de latitud, por medio de estrellas observadas á sus pasos por el vertical primario.

Causa pena ver estos lunares científicos, excusables por la premura con que se quiso llevar á cabo el enlace astronómico, en una empresa internacional de la más elevada categoría por su importancia y trascendencia. Los métodos más exactos y los instrumentos más perfectos eran los requeridos para armonizar con todo lo demás en la belleza del conjunto; y si el otoño de 1879 no daba hueco para conseguir de manera conveniente el objeto propuesto, los veranos de 1880 y posteriores hubieran podido suplir ampliamente esta falta.

Desde que el capitán *Andrew Talcott* inventó en 1834, y el *Coast Survey* de los Estados Unidos perfeccionó después, el instrumento llamado *anteojo zenital* y el sistema para determinar por su medio, de una manera exactísima, la latitud de un lugar, siempre que se desee alcanzar gran aproximación, debe recurrirse á este sistema y á tal instrumento, con preferencia al método de Bessel, basado sobre el paso de estrellas por el vertical primario, y con mayor razón á todos los demás sistemas conocidos. Con él se suprimen los errores de graduación del instrumento (nunca bien apreciados), así como los de su lectura, puesto que no la hay; y se eliminan casi por completo los de refracción, ya sean debidos á las tablas ó fórmulas usadas, ya á constantes errores del barómetro ó termómetro, ya á peculiar estado de la atmósfera, que aquí debe suponerse el mismo en la observación de dos estrellas conjugadas. Solamente quedan existentes, de alguna importancia, los errores de nivel y los de declinación, debidos éstos á lo imperfecto de los catálogos de estrellas; pero multiplicando ampliamente el número de las observadas, puede reducirse á pequeñas proporciones este motivo de error, común por otra parte á todos los demás métodos (*).

Cualquier instrumento portátil de paso puede adaptarse al sistema de Talcott, proveyéndolo, si ya no lo está, de un hilo movible horizontal para el ocular del anteojo, con su correspondiente micrómetro, y de un nivel muy sensible. Nuestra Comisión Hidrográfica emplea un teodolito de Repsold, de anteojo quebrado, para la determinación de latitud por dicho sistema, y ha obtenido con él brillantes resultados (**).

(*) Además, este motivo de error podía aquí obviarse ó aminorarse mucho, midiendo en los Observatorios fijos las declinaciones de las estrellas empleadas en tan memorable ocasión, como alguna vez se ha practicado para otras de menor cuantía. Esta precaución es aún más conveniente en el sistema de Talcott, porque siendo necesario elegir estrellas conjugadas dos á dos con respecto al zenit, es forzoso recurrir generalmente á las de pequeña magnitud, cuyas declinaciones pueden no estar tan bien calculadas como las de otras estrellas más importantes. En el mayor número de estrellas observadas puede buscarse también la mejor compensación de tales errores, los cuales, aun en las estrellas fundamentales, suelen ser de consideración, como puede verse por el cotejo de distintos Catálogos y lo atestigua la misma *Memoria* en su pág. 264, refiriéndose á estrellas tan importantes como α Ursœ Majoris y γ Cassiopei.

(**) Estos han sido notables, tanto cuando las declinaciones de las estrellas se midieron en un Observatorio fijo (latitud de Tarragona) como cuando se tomaron de un buen Catálogo (latitud de Rosas). Con el mismo instrumento, único que posee la Comisión Hidrográfica, determina astronómicamente los azimutes por las *máximas digresiones*, y el *tiempo* en las observaciones de longitud, actuando para éstas como anteojo meridiano. La armazón del ocular es giratoria á fin de que sea fácil colocar el hilo movible, ya en el plano meridiano, ya en uno que le sea perpendicular, según la clase de observación á que el instrumento se aplique. (*Observaciones en Tarragona*, pág. 7.)

En resumen, así como la determinación de diferencia en longitud merece todo elogio, las de latitud y azimut parecen deficientes para el caso, y hubiera sido muy loable su repetición en otro año, durante la época de mejores circunstancias atmosféricas, con tranquilidad y sosiego, siguiendo los sistemas más adecuados y por medio de los instrumentos más perfectos.

Y aun así, todavía juzgara flaco para la ocasión el enlace astronómico. ¿Cuánta más luz no se obtendría extendiendo la observación á los otros dos vértices del cuadrilátero, para que fueran cuatro las estaciones astronómicas, así como cuatro fueron las geodésicas? Por lo que atañe á sacrificios, trabajos y gastos todo sería un juguete en comparación con los del enlace geodésico (*); en cambio, el conjunto de la obra hubiera ganado en corrección, belleza y armonía, á la vez que los geodestas del porvenir, al procurar la determinación de la figura y dimensiones de nuestro planeta, encontrarían mayor riqueza de preciosos datos en este enlace de dos Continentes.

Para explicar algo la anterior afirmación, conviene traer á la memoria que la línea vertical matemática y la plomada, cuyas direcciones se consideran como una misma en casi todos los trabajos de Astronomía y Geodesia, no lo son así en realidad, puesto que rigorosamente la primera es la dirección que tendría la segunda, si no obrasen sobre ella otras atracciones más que la de la gravedad terrestre, y si la tierra fuera con toda exactitud

---

(*) Pudieran suprimirse las más dificultosas de las observaciones, que son las de diferencia en longitud entre Mulhacen y los vértices africanos, así como la diferencia en longitud entre Tetica y Filhaoussen. Aunque una de las componentes rectangulares del *desvío de la plomada* es función de la diferencia en longitud, la falta de esta observación puede suplirse con la de azimut, del cual también es función la misma componente. Por otra parte, bastan las diferencias en longitud que corresponden á los lados cortos del cuadrilátero, las cuales se observarían fácilmente mediante el colimador óptico con luz de petróleo, y sin necesidad de motores de vapor, dinamos y demás piezas voluminosas, cuya ascensión presenta grandes dificultades.

un elipsoide perfecto de masa homogénea; empero como nuestro globo tiene repartida su masa de un modo irregular, y como también es irregular la superficie terráquea, alternando en ella grandes montañas sobre los Continentes, con profundas depresiones submarinas, la dirección real de la plomada debe ser y es distinta de esa otra dirección imaginaria, que teóricamente coincide con la vertical matemática ó elipsóidica; y siendo, por otra parte, muy variadas las circunstancias locales de cada estación geodésica, distintos han de ser también los *desvíos de la plomada* para diversas estaciones.

Dichos *desvíos,* que generalmente son de poca magnitud, llegan hasta 10″ y aun exceden de 10″ en países montañosos y en las cercanías de las costas marítimas; pudiendo alcanzar, quizás, como valor máximo, 1′ 30″. En una interesante operación geodésica practicada en el Cáucaso se observó una diferencia de 54″ entre los *desvíos de la plomada* correspondientes á dos puntos, cuya diferencia en latitud era menor de un grado. En nuestro cuadrilátero, cuyos vértices tienen la doble condición de estar situados en países montañosos y próximos al mar, es de temer que los desvíos sean de alguna importancia en su magnitud, y de variedad en su dirección. La influencia de ellos ha de afectar, no solamente á todas las observaciones astronómicas de latitud, longitud y azimut, sino también á las mediciones geodésicas de los ángulos horizontales, puesto que unas y otras tienen por norma y fundamento la dirección de la plomada.

Formularé primeramente la influencia sobre el ángulo horizontal. Sea Θ el *desvío de la plomada*, esto es, el ángulo que forma la dirección de la plomada con la vertical matemática de la *estación*, A' el azimut de este desvío, $z_{1.2}$, $z_{1.3}$ las distancias zenitales de los dos *objetos*, y $\omega_{1.2}$, $\omega_{1.3}$ sus azimutes: todas estas cantidades se suponen ser las verdaderas y que están referidas á la dirección efectiva de la plomada y al zenit y meridiano que dicha dirección determina; los azimutes contados, como de costumbre, del Sur hacia el Oeste y de 0° á 360°. La corrección que habría que aplicar al ángulo horizontal medido M' para obtener el ángulo M que se hubiera observado, si la plomada coincidiera con la vertical matemática, está expresada por la fórmula

$$M - M' = \left\{ \begin{array}{l} \xi\left(\text{cotang}\, z_{1\cdot 2} \sin \omega_{1\cdot 2} - \text{cotang}\, z_{1\cdot 3} \sin \omega_{1\cdot 3}\right) \\ -\eta\left(\text{cotang}\, z_{1\cdot 2} \cos \omega_{1\cdot 2} - \text{cotang}\, z_{1\cdot 3} \cos \omega_{1\cdot 3}\right) \end{array} \right\}$$

en la cual ξ y η representan las componentes del desvío, definidas por las expresiones

$$\xi = \Theta \cos A', \qquad \eta = \Theta \sin A'.$$

Pasando ahora á las influencias del ***desvío de la plomada*** sobre las observaciones astronómicas, si para un punto A del elipsoide designan φ_1, L_1, $\omega_{1\cdot 2}$, latitud, longitud y azimut astronómicos observados, y φ'_1, L'_1, $\omega'_{1\cdot 2}$ las mismas magnitudes corregidas del efecto causado por dicho desvío; las respectivas correcciones son

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi'_1 &= \xi_1 + \dots \\ L_1 - L'_1 &= -\eta_1 \sec \varphi_1 + \dots \\ \omega_{1\cdot 2} - \omega'_{1\cdot 2} &= \eta_1 \text{tang}\, \varphi_1 + \dots \end{aligned}$$

Si en otro punto B del elipsoide, φ_a, L_a representan las coordinadas geográficas observadas, ω_a el azimut observado hacia el punto A; φ_g, L_g, ω_g los mismos valores deducidos de los de φ_1, L_1, $\omega_{1\cdot 2}$, mediante el cálculo geodésico de la red que liga á ambos puntos; si se hace también caso omiso de los errores de observación y se supone además que las componentes ξ_1, η_1 del desvío de la vertical en *A* son iguales á cero, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} \xi_2 = \varphi_g - \varphi_a + \ldots \\ \eta_2 = -(L_g - L_a) \cos \varphi_a + \ldots \\ \eta_2 = (\omega_g - \omega_a) \operatorname{cotang} \varphi_a + \ldots \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

en donde ξ_2 y η_2 son las componentes del desvío de la plomada en *B*, supuesto nulo el desvío de la vertical en *A*; por tanto, vienen á representar la relación entre ambos desvíos.

De las dos últimas expresiones se deduce:

$$\omega_a - \omega_g + (L_a - L_g) \sin \varphi_a + \ldots = 0 \qquad (x)$$

fórmula de Laplace, que fué analizada detenidamente en el capítulo anterior.

Las fórmulas (III) aplicadas á nuestro vértice Tetica, con el origen del vértice argelino M'Sabiha, dan

$$\begin{array}{rcl} \varphi_g & = & 37^\circ\ 15'\ 14'',83 \\ \varphi_a & = & 37\ \ 15\ \ 11,90 \\ \hline \xi_2 & = & +\ 2,93\ . \end{array}$$

En el anterior capítulo se halló

$$\begin{array}{rcl} L_a - L_g & = & -\ 8'',752 \\ \omega_a - \omega_g & = & +\ 7,490\ ; \end{array}$$

luego

$$\eta_2 = -(L_g - L_a) \cos \varphi_a = -8{,}752 \cos \varphi_a = -6'',97$$

$$\eta_2 = (\omega_g - \omega_a) \operatorname{cotang} \varphi_a = -7{,}490 \operatorname{cotang} \varphi_a = -9{,}85.$$

Resultan dos valores para η_2, que debieran coincidir cuando se realizara la comprobación de la fórmula *(x)*. Opto por un valor intermedio, — 7",44, que se aproxime más al primero que al segundo, por considerar más fidedigna la observación de longitud que la de azimutes; y las componentes del *desvío relativo* entre los dos puntos considerados, serán

$$\xi_2 = + 2'',93$$
$$\eta_2 = - 7'',44,$$

que representan un desvío relativo de 8", en una dirección, respecto al meridiano de Tetica, representada por el azimut *A'*, según la ecuación

$$\text{tang}\, A' = \frac{-7,44}{+2,93},$$

de donde $A' = 291^\circ\, 30'$. Este resultado viene de acuerdo con el prejuicio que pudiera formarse, al considerar que los dos vértices elegidos están en países montañosos y en distintos Continentes, que la superficie terrestre se inclina desde una y otra estación, en fuerte declive, hasta el fondo del mar intermedio, y parece por consiguiente que ambos desvíos de la vertical deben converger hacia el Mediterráneo.

Todo esto que someramente dejo indicado sirve para que se entrevea el ancho campo que ofrecerían las observaciones astronómicas de los cuatro vértices, no solamente para perfeccionar la compensación (con detalles que pueden verse en los tratados de Geodesia superior), llenando así más cumplidamente el objeto propuesto, sino también con el fin de allegar nuevos é interesantes datos que ayudaran á la secular empresa y vasto problema, para cuyo fin y solución *pelean á porfía la incompa-* *[illegible]e magnificencia de los Monarcas, con la zelosa ob[illegible]* *diente diligencia de los Vasallos, por hacerse útiles á la Patria y á todo el resto del Orbe,* según dijo hace más de un siglo nuestro inolvidable D. Jorge Juan.

Para formar una idea de la amplitud á que se presta el asunto pueden verse, además de la obra ya citada de Helmert, las siguientes:

Gauss' Werke, tomo IV, 1830.

Bessel.—Über den Einfluss der Unregelmässigkeiten der Figur der Erde auf geodätische Arbeiten und ihre Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen. Astronomischen Nachrichten, tomo XIV.

Die bayerische Landesvermessung.

General von Schubert, 1860.—Astronomischen Nachrichten, tomo LII.

Villarceau, Sadebeck, Bremiker. — Idem íd., tomos XC y XCI.

Ordnance Trigonometrical Survey, Principal Triangulation, 1858, en donde para la medición de la Gran Bretaña é Irlanda hay observaciones astronómicas de latitud en treinta y cinco estaciones, de azimut en otras treinta y cinco y de longitud en cinco. Con el auxilio del cálculo geodésico se determinaron los *desvíos de la plomada* y hasta el achatamiento del elipsoide más plausible, se corrigieron mediciones y posiciones geográficas, y, como dice un sabio autor, los detalles recompensaron ampliamente el suplemento de trabajo.

La compensación de algunas determinaciones de longitud hecha por Albrecth en *Astronomischen Nachrichten,* tomo LXXXIX.

Los trabajos de *W. Struve* en la medición de grado de las provincias orientales rusas.

Los de *James* en la medición de grado inglesa.

Verhandlungen der 5 allgemeinen Konferenz der Europäischen Gradmessung. Berlín, 1878.

La determinación de una serie de *desvíos de la ploma-*

da hecha en Harze por el Real Instituto geodésico de Prusia.

Otra del mismo género hecha para los alrededores de los Alpes por *Carl von Orff,* en su escrito titulado *Bestimmung der geographischen Breite der Königlichen Sternwarte bei München, 1877* (suplemento al tomo XXI de los *Anales* del dicho Observatorio), en el cual hay un interesante apéndice donde se determinan dichos desvíos, mediante las distintas redes geodésicas trazadas al Norte y al Sur de la cordillera por alemanes, austriacos, suizos é italianos, y las correspondientes observaciones astronómicas, que fueron 31 de latitud, 8 de longitud y 14 de azimut, sin contar las del Observatorio citado, que se tomó como punto de partida.

Etc., etc.

Hoy nos contentamos con la observación esmerada de latitud y longitud para la posición geográfica de un punto de la superficie terrestre, sin tener en cuenta las más de las veces que aun las mejor observadas son erróneas, porque su fundamento es la incierta y misteriosa dirección de la plomada. Un día llegará, y tal vez no esté lejano, en que no solamente se corrijan por ello estas coordinadas, sino que para definir un lugar no se las crea suficientes y precise agregarles la distancia al centro de la tierra ó punto que se tome como origen, la magnitud y azimut del desvío de la plomada, y aun hasta la fecha en que se determinó este desvío y reglas de sus variaciones, ya que es indudable la instabilidad de su dirección.

CONCLUSIÓN

No puedo tener confianza absoluta en la exactitud de los cálculos numéricos que he creído oportuno hacer para la redacción de las precedentes páginas, por varias razones que se suman á la de mi insuficiencia, algunas de las cuales enumero á continuación:

1.ª La falta de otra persona que, como es costumbre en cálculos de tal índole y magnitud, las practicara paralelamente conmigo, disminuyendo así y casi anulando, por el cotejo de los resultados sucesivos, la probabilidad de los inadvertidos errores.

2.ª La carencia de tablas logarítmicas con ocho y diez cifras de mantisa, que ha aumentado considerablemente la dosis de trabajo y las ocasiones de error, obligándome á calcular muchos logaritmos que necesité del dicho linaje.

Y, 3.ª Que el objeto perseguido es únicamente el de aquilatar con cifras la trascendencia que mis consideraciones teóricas han podido ocasionar en el terreno de la práctica, y no el de obtener cumplidísimos resultados, merecedores de ciega confianza, toda vez que el presente, insignificante y desautorizado estudio, no puede, ni procura tener eficacia oficial alguna. Así, que he renunciado á muchas comprobaciones y ardides á que hubiera podido recurrir para orillar ó contrarrestar las indicadas consecuencias, que las faltas de segunda mano y competente tabla logarítmica pueden originar, por la atendible consideración de que aquellos nuevos cálculos duplicarían y quizás triplicarían mi ya prolija tarea, sin justificado motivo ni proporcionado fruto.

Espero, sin embargo, que tal como están los resultados obtenidos, respondan al único objeto que me propuse y tengan la suficiente aproximación para dicho fin; y ahora, con la idea de que puedan abarcarse cómodamente bajo una ojeada, los recopilo aquí, así como su comparación con los resultados correspondientes, hallados por los autores de la *Jonction*.

LADOS Y DIAGONALES DEL CUADRILÁTERO

Lados.		Según la *Jonction.*	Diferencias.
F M	269926m,17	269926m,93	— 0m,76
F T	257411,44	257412,28	— 0,84
F S	105179,08	105179,35	— 0,27
S M	269846,74	269847,23	— 0,49
S T	225711,88	225712,49	— 0,61

ÁNGULOS ESFERÓIDICOS COMPENSADOS

Angulos.		Según la *Jonction.*	Diferencias.
T F M	17° 52′ 27″,286	17° 52′ 27″,100	+ 0″,186
M T F	89 39 16,280	89 39 16,141	+ 0,139
F M T	72 29 10,599	72 29 10,924	— 0,325
M S F	78 48 45,316	78 48 45,728	— 0,412
F M S	22 28 45,854	22 28 45,874	— 0,020
S F M	78 43 39,574	78 43 39,142	+ 0,432
T S M	16 19 51,760	16 19 51,669	+ 0,091
M T S	133 40 26,992	113 40 26,778	+ 0,214
S M T	50 00 24,745	50 00 25,050	— 0,305
S F T	60 51 12,288	60 51 12,042	+ 0,246
T S F	95 08 37,076	98 08 37,397	— 0,321
F T S	24 01 10,712	24 01 10,637	+ 0,075

COORDINADAS GEOGRÁFICAS

		Según la *Jonction.*	Diferencias.
Latitud F.	35° 00′ 34″,421	35° 00′ 34″,64	— 0″,219
Longitud F.	4 01 40,182	4 01 39,69	+ 0,492
Latitud M.	37 03 18,056	37 03 17,59	+ 0,466
Longitud M.	5 38 59,396	5 38 57,91	+ 1,486
Latitud T.	37 15 15,265	37 15 14,71	+ 0,559
Longitud T.	4 45 04,089	4 45 03,14	+ 0,949

AZIMUTES GEODÉSICOS

Lados.		Según la *Jonction.*	Diferencias.
T M	74° 47′ 27″,986	74° 47′ 28″,590	— 0″,604
M T	254 14 53,935	254 14 54,850	— 0,915
M S	304 15 18,680	304 15 19,900	— 1,220
S M	125 42 57,137	125 42 57,488	— 0,351
S T	142 02 48,897	142 02 49,157	— 0,260
T S	321 07 00,994	327 07 01,812	— 0,818
S F	46 54 11,821	46 54 11,760	+ 0,061
F S	226 24 59,692	226 24 59,920	— 0,228
F T	165 33 47,404	165 33 47,878	— 0,474
T F	345 08 11,706	345 08 12,449	— 0,743
F M	147 41 20,118	147 41 20,778	— 0,660
M F	326 44 04,534	326 44 05,774	— 1,240

Si el enlace geodésico de Argelia con España es un acontecimiento científico, que por sus excepcionales condiciones dejará perpetua memoria entre los geodestas y será citado en las obras de texto, como menos fundadamente lo es el de las Baleares con España, practicado por Biot y Arago á principios del siglo actual; si para el logro de esta gigantesca medición, sabios jefes, distinguidos oficiales y centenares de ayudantes dedicaron durante años, los unos su ciencia, todos sus afanes, sufriendo privaciones, corriendo peligros, viviendo entre tempestades, helados por temperaturas polares, amenazados, ya del rayo, ya de quedar cercados por la nieve, y experimentando prolongadas ansiedades por el temor de no alcanzar el objeto deseado; si los más ilustres matemáticos de un siglo acá, los Bessel, Gauss, Hansen, Legendre, Meissel, Grunert, Zacharie, Baeyer, Bremiker, Delambre, Winterberg, Bachoven, Christoffel, Jordan, Weingarten, Andrœ, Sonderhof, Schlömilch, Clarke y otros, han destilado sus ingenios para darnos procedimientos y fórmulas de gran rigor y exactitud, que nunca habían de encontrar aplicación en la práctica cotidiana, únicamente en la previsión de un caso tan extraordinario y raro como el que nos ocupa; si los más recientes descubrimientos y adelantos, ayudados por la perfeccionada industria, han proporcionado especiales instrumentos de precisión y potentes aparatos lumínicos que, no sólo han hecho posible la titánica empresa, sino también son una garantía de la mayor exactitud en las operaciones practicadas; si, finalmente, España y Francia han empleado cuantiosas sumas, con el exclusivo objeto de llevar á cabo la medición de ocho ángulos en la forma más exacta á que hoy se puede aspirar; necesario y lógico es que el calculista, sentado cómodamente en el atemperado gabinete y sin correr riesgos ni peligros, manipule estas ocho observaciones de manera tal, que su obra encaje armónicamente dentro del hermoso cuadro de potentes esfuerzos antes bosquejado; es indispensable que no emplee los medios rutinarios y corrientes de las triangulaciones comunes; que no se escude en que los errores despreciados sean pequeños y escasa su influencia en los resultados; que utilice los procedimientos analíticos más rigorosos, las fórmulas más exactas, puestas por los autores á su disposición, precisa y exclusivamente para la ocurrencia de casos tan extraordinarios como el actual; que se coloque, en una palabra, á la altura de las circunstancias, y corresponda en digna forma á la grandeza de los precedentes, cuya continuación y complemento se le confió. La aguja de salmar, el hilo de acarreto y el rempujo, propios para coser jergas y lonas, no está bien que se apliquen á unir ricas telas de terciopelo y brocado, por más que resulten igualmente bien adheridas; ni tampoco el traje de faena, utilísimo para diario, puede admitirse á la recepción de fiesta de gala en el palacio del soberano, por más que el individuo vaya igualmente abrigado y honesto.

NOTA. Todo lo que dejo dicho á propósito del enlace geodésico hispano argelino, es igualmente aplicable al otro enlace geodésico, también magno, que posteriormente llevó á efecto el Instituto Geográfico y Estadístico entre las islas Baleares y la Península (*). Ambos tienen la

(*) *Memorias del Instituto Geográfico y Estadístico*.—Tomo VI, 1886.

La red del enlace hispano-balear abarca 2 grados en latitud y 4 en longitud, y contiene 10 vértices, unidos por 21 visuales todas recíprocamente observadas, que dan motivo á 16 ecuaciones de condición (12 de ángulo y 4 de lado) para compensar los 32 ángulos de que consta la medición. El método de cálculo que figura en dichas *Memorias* es idéntico al que emplearon las Comisiones española y francesa en la *Jonction géodésique* é igualmente impropio para el caso, según mi desautorizado criterio. Es aún más deplorable la indicada deficiencia, por cuanto la observación laboriosa y preñada de dificultades de los 32 ángulos comenzada en 1867 y no terminada hasta 1885, resultó notablemente precisa y delicada, á pesar de los mil inconvenientes anexos á las especiales circunstancias, como lo manifiesta la compensación acusando $\pm$ 0",608 para error probable de una dirección sin compensar: valor bastante pequeño si se considera la desusada magnitud de las visuales y su dirección, casi rasante en algunos punmisma extraordinaria importancia, por ser eslabones de la cadena trazada para la medición del amplio arco de meridiano que, partiendo de las islas Shetland, atraviesa toda la Europa occidental y llega hasta el Africa, á través del mar Mediterráneo, concluyendo por ahora en el confín Norte del gran Desierto de Sahara. Los dos enlaces se componen de triángulos igualmente gigantescos, que si uno del argelino mide 70″ de exceso esférico, 66″ mide otro del balear. La red de este último tiene un lado de 238 kilómetros (Desierto—Torrellas) mayor aún que la distancia entre la estación española Tetica y la africana M'Sabiha; y varios vértices cuyas elevaciones sobre el nivel medio del mar cuentan de 700 á 1445 metros. Las condiciones de uno y otro enlace son, por lo tanto, muy semejantes, y así como he creído que el de Argelia debió ser tratado por vías de cálculo más rigoroso, así también debo creer que el de las Baleares merece ser idénticamente recalculado, aplicando á los 32 ángulos medidos todas aquellas correcciones que en justicia les corresponden y quedan descritas en los capítulos III y IV. Igual aspiración que la mía, supongo á la Comisión Hidrográfica, la cual necesita de este enlace, brillantemente observado por el Instituto, para unir entre sí, de la manera más exacta posible, las dos redes geodésicas que midió aisladas, una en las costas de la Península y la otra en el citado archipiélago balear, y comparar también las observaciones astronómicas hechas en ambas redes. A ella, pues, corresponde, antes que á mí, el profundizar en este nuevo asunto que me limito á indicar.

---

tos á la superficie del mar, por lo cual eran de temer grandes desvíos causados por las refracciones anormales en sentido lateral.

De cualquier modo que se considere esta egregia y trascendente observación, entiendo que resulta acreedora, como la hispano-argelina, á un tratamiento de cálculo más esmerado y rigoroso.